

sind, wenn die Übereinstimmung ihres Subjektsbegriffes mit dem mit-sich-selbst-identischen Subjektsgegenstand evident ist, und daß infolgedessen bei der erkenntnistheoretischen Untersuchung jedes positiven a. U. prinzipiell ein doppelter Rekurs auf die ontologische Sphäre notwendig ist. Das rationalistische Erkenntnisideal einer apriorisch-analytischen Welterfassung ist also eine Utopie. Das schauende Erfassen der Gegenstände ist notwendige Voraussetzung für das denkende Erfassen dieser Gegenstände. „An der Spitze kann nicht das Denken, sondern muß das Sein stehen, weil ohne Schauen kein Verstehen von Bedeutungen möglich ist, und es ohne zugrundeliegendes Sein kein Schauen geben kann, da Bedeutungen keinerlei Bestehen an sich selbst haben.“¹²

¹² Geyser, Grundlegung der Logik und Erkenntnistheorie, Münster 1919, S. 387.

ZUM PROBLEM DES REGRESSUS IN INFINITUM

Von Universitätsprofessor Dr. Hugo Dingler,
München

I.

Joseph Geyser hat in seiner Schrift „Naturerkenntnis und Kaufgesetz“ (Münster i. W. 1906) in klassischer Prägnanz das Wesen des unendlichen Regresses ausgesprochen. „Wo finden wir die Gründe, die unserm Urteil Halt geben? Manchmal liegt der Grund außerhalb des Urteils, das durch ihn begründet wird. Manchmal aber trägt das Urteil seinen Grund in sich selbst, d. h. im innern Verhältnis seiner Begriffe. Dann besitze ich ein selbstverständliches Urteil. Gäbe es keine derartigen Urteile, so wäre überhaupt kein Urteil begründet. Denn wie wollte ich ein Urteil durch ein anderes begründen, wenn dieses andere Urteil selbst wieder durch ein noch anderes begründet werden müßte, und ich niemals zu einem durch sich selbst begründeten Urteil gelangte,“ sagt er l. c. pag. 88. Und, vielleicht noch schärfer (l. c. p. 109): „Der erste Hebel, der in unsere Position Bresche legen soll, ist der Gedanke, zur Erklärung des Bedingten in der Welt sei die Annahme eines Unbedingten zwar dann erforderlich, wenn die Reihe des Bedingten endlich und begrenzt gedacht werde, dagegen nicht mehr, wenn man sich entschieße, mit der Möglichkeit einer unendlichen Reihe des Bedingten Seienden zu rechnen. Soll, so frage ich, dieser Gedanke wirklich überzeugende Kraft besitzen? Aber dann müßte ich — um die Sache an einem trivialen Beispiel zu illustrieren, — auch behaupten dürfen, ich könne unsere Eisenbahnwagen allsobald von der Notwendigkeit der Lokomotive zu ihrer Fortbewegung befreit denken als ich ihre Zahl nicht endlich, sondern unendlich groß annehme.“

Der sogenannte „unendliche Regreß“ oder „regressus in infinitum“ ist eine Schlußform, die immer wieder in philosophischen Untersuchungen auftritt. Sie ist ein spezieller Fall unbegrenzter Gedankenreihen überhaupt und hat daher viele Eigenschaften, die dieser umfassenderen Gruppe logischer Formen gemeinsam anhaften. Die Funktion des unendlichen Regresses im spezielleren Sinn ist die, zu zeigen, daß auf einem bestimmten Wege eine feste Begründung für einen Satz nicht zu gewinnen ist. In den Worten Geyfers haben wir die Formulierung und Begründung dieser Funktion vor uns.

Das gedankliche Schema des unbegrenzten Regresses oder Progresses

scheint von Anaximander in seiner formhaften Bedeutung entdeckt worden zu sein. Sein Schema läßt sich nach Art der Mengenlehre charakterisieren als eine Reihe von Elementen, von denen jedes ein unmittelbar folgendes hat und bei der jeder Abschnitt eine endliche Reihe ist. Die bei Hesiod bereits beinahe schematisch auftretenden endlichen Kaufalreihen, in denen die aufeinanderfolgenden Elemente durch die Relation der Zeugung verknüpft sind, könnten der Ausgangspunkt dieser Gedankenbildung gewesen sein. Werden diese Reihen nicht mehr wie bei Hesiod als Darstellung historischer Ereignisse, sondern, wie es der Tendenz der jonischen Naturphilosophen entspricht, als konstitutives Prinzip der Natur betrachtet, und demgemäß nach oben offen gelassen, ins Unbestimmte hinein, dann haben wir das Schema, das sich bei Anaximander aus den überlieferten Stellen entnehmen läßt. Es liegt schon in dem berühmten Satz: „Denn woraus (den Dingen) die Geburt ist, dahin geht auch ihr Sterben nach dem Schicksal. Denn sie zahlen einander . . . nach der Zeit Ordnung.“ (Diels 2, 9.) Ferner nahm er eine „unendliche Reihe nebeneinander bestehender und aufeinander folgender . . . Welten“ an. (Ueberweg-Prächter I¹² p. 48.)

Bei dem Eleaten Zeno hat sich das logische Schema des unendlichen Regresses bereits zu einem formalen Instrument von großer Kraft entwickelt, insbesondere dadurch, daß er seine Anwendbarkeit innerhalb des zugänglichen räumlichen Bereiches entdeckt, wo es dann später zum Infinitesimalen und zum Stetigkeitsbegriffe führt. So sagt er (Diels B. 3., nach Simplicios): „Denn zwischen den einzelnen Dingen liegen stets andere und zwischen jenen wieder andere.“ Da das Zwischenliegende auch wieder „Dinge“ sein sollen, so ist auf diese der gleiche Gedanke wieder anwendbar. Jede Anwendung des Gedankens führt auf eine Konstellation, welche der in dem Satze enthaltenen Ausgangskonstellation wiederum begrifflich entspricht, wodurch das Verfahren auch auf sie anwendbar ist — ohne Ende.

Wir haben einen unbegrenzt iterierbaren Denkvorgang vor uns, in dem auf die durch den Gedanken festgestellten neuen Dinge, weil sie genau denen der Ausgangskonstellation entsprechen, der Denkvorgang sogleich wieder anwendbar ist. Wir wollen diesen iterierbaren Denkvorgang als den *erzeugenden* Denkvorgang der unbegrenzten Reihe bezeichnen. Um die Unbegrenztheit der Reihe festzustellen, bedarf es innerhalb dieser Überlegung nicht der wirklichen fortgesetzten Ausführung der Iteration, sondern diese Unbegrenztheit ist an dem erzeugenden Denkvorgang (der Erzeugungsvorschrift) unmittelbar feststellbar. Es genügt dazu die Feststellung, daß nach

Anwendung der Erzeugungsvorschrift auf eine sinnngemäße Ausgangskonstellation eine solche Konstellation auftritt, die in Bezug auf die in der Erzeugungsvorschrift beanspruchten Eigenschaften von der gleichen Art ist wie die Ausgangskonstellation. Damit ist gesagt, daß in jedem Stadium der Anwendung die Erzeugungsvorschrift formal stets noch einen Schritt weiter anwendbar ist. Die Reihe der so möglichen Einzelschritte hat also niemals ein letztes Element, sie ist ohne eine Grenze, unbegrenzt. Indem aber die Unbegrenztheit direkt an der Erzeugungsregel selbst, also *im Endlichen*, konkret feststellbar ist, ist das Unendliche damit in den Bereich der unmittelbaren logisch exakten Handhabung gerückt. Es ist das potentielle Unendliche des Aristoteles.

Aber Zeno bedient sich auch bereits des unendlichen Regresses im eigentlichen Sinne mit dem Ziele, einen Gedanken als unbegründbar und damit als stets unbegründet und zugleich als unbrauchbar nachzuweisen. Wenn alles Seiende in einem Raume wäre (und der Raum selbst ein Seiendes ist), so müßte offenbar ein Raum dieses Raumes bestehen, so argumentiert er. Wir erhalten auch hier wieder eine unbegrenzte Iterierbarkeit dieses Gedankens, wenn eben der Raum selbst als ein Seiendes aufgefaßt wird und die Prämisse zurecht besteht. Dann nämlich muß für den Raum selbst der Satz wiederum gelten und so fort in inf. Aristoteles versucht (Physik IV. 3) diese Aporie dadurch zu lösen, daß er verschiedene Arten des „in einem Raume Seins“ unterscheidet. Dadurch wird die für den unendlichen Regreß nach jedem Schritte wesensnotwendige genaue Wiederherstellung der Ausgangssituation unterbrochen und der Regreß unterbunden.

Ein anderes klassisches Beispiel des Regresses in infinitum ist folgendes. Aristoteles sagt (Met. 1006a): „Denn es ist ganz unmöglich, daß es für alles ohne Ausnahme einen Beweis gibt; denn es ginge ins Unendliche, so daß auch so kein Beweis zustande käme.“ Und in näheren Ausführungen (An. post. I. 3.): „Die, welche das Wissen überhaupt bestreiten, behaupten, daß man dabei in das Endlose gerate, da man das Folgende durch das Frühere nicht wissen könne, wenn es kein Erstes gäbe. In diesem Punkte haben sie recht, denn man kann das Endlose nicht bis zum Ende durchgehen.“

Hier haben wir die widerlegende Funktion des unendlichen Regresses implicit vor uns. Der Sinn ist: Wenn für alles ohne Ausnahme ein Beweis vorhanden sein müßte, dann müßte auch für die Prämissen dieser Beweise ein Beweis da sein, für diese gälte das Gleiche und so in inf. Nur dann aber wäre ein vollständiger und endgültiger Beweis für eine Aussage geliefert,

wenn dieser in seinen allerletzten Wurzeln auf Prämissen beruhen würde, die selbst eines Beweises nicht mehr bedürften, die also auf eine andere Weise, als es der Beweis ist, ihre Geltung und Sicherheit gewährleistet erhalten. Andernfalls würde dieser Beweis in seinen Wurzeln immer noch Unbewiesenes enthalten, wäre also kein endgültiger Beweis. Soll es also endgültige Beweise geben, so kann nicht „alles ohne Ausnahme“ eines Beweises bedürftig sein, es muß außer dem Beweise noch andere Mittel zur Sicherung der Geltung gewisser Sätze geben.

II.

Der unendliche Regreß ist gelegentlich auch benutzt worden, um bestimmte Wahrheitskriterien als unbrauchbar nachzuweisen. So bedient sich L. Nelson („Über das sogenannte Erkenntnisproblem“, Göttingen 1908, p. 77) dieses Verfahrens bezüglich eines pragmatischen Wahrheitskriteriums. Tritt dieses in der Gestalt auf „Wahrheit ist Denknützlichkeit“ und wird außerdem von dem Wahrheitskriterium verlangt, daß es selbst eine ontologische Aussage darstelle, ein Urteil also, das selbst dem als allgemein angenommenen Wahrheitskriterium unterliegt, dann muß dieser Satz auf sich selbst angewendet werden. Durch diese Iteration kommt ein Satz zustande, daß es denknützlich sei, Wahrheit sei Denknützlichkeit. Da dieses wieder ein Urteil sein soll, so kann der Satz iteriert werden und so in inf.

Damit zeigt sich, daß unter den hier vorliegenden Prämissen dieses Wahrheitskriterium unbrauchbar ist, denn Wahrheit könnte so niemals wirklich festgestellt werden. Dieser Nachweis richtet sich jedoch vom logischen Gesichtspunkte aus nicht gegen das Wahrheitskriterium allein, sondern zunächst gegen die Gesamtheit der Prämissen ebenfalls, unter denen diese Ableitung erfolgt ist. Es empfiehlt sich daher, diese gefondert herauszustellen.

a) Zunächst ist implicit vorausgesetzt, daß es nur *eine* Art von Wahrheit gebe, eben die, welche durch das Kriterium charakterisiert ist.

b) Im Besonderen aber ist in dieser Hinsicht vorausgesetzt, daß das Kriterium der gleichen Art von Wahrheit unterstehe, die es selbst ausagt.

c) Dies wiederum bedingt die noch umfassendere Voraussetzung, daß das Kriterium überhaupt so beschaffen sei, daß sein Inhalt unter dem Gesichtspunkt einer ontologischen Wahrheit betrachtet werden könne (daß es also z. B. nicht eine reine Nominaldefinition oder eine Festsetzung sei).

Ist b oder c nicht erfüllt, dann ist der unendliche Regreß ausgeschlossen,

a genügt allein hierzu noch nicht. Ist c nicht erfüllt, dann sind es auch a und b nicht. Ist b nicht erfüllt, dann ist es auch a nicht.

Sind diese drei Voraussetzungen erfüllt oder wenigstens b und c, dann gilt die Abweisung des obigen Wahrheitskriteriums für jedes Kriterium der Form: „Wahrheit ist X-Eigenschaft eines Satzes.“

Fassen wir demgegenüber den Fall ins Auge, wo ein Wahrheitskriterium als Definition auftritt. In diesem Falle muß ebenfalls ein psychologischer Feststellungsprozeß existieren, der zu einer Aussage führt. Das Resultat dieses Prozesses nenne ich dann „wahr“.

Auch das obige Kriterium könnte so aufgefaßt werden. Wenn die Feststellung der Denknützlichkeit eines Satzes ein klar definierbares Verfahren wäre (wovon sie zunächst weit entfernt ist), könnten so gewonnene Sätze durch Nominaldefinition als „wahr“ bezeichnet werden — wenn nicht jede Beziehung dieses Kriteriums zur Wirklichkeit fehlen würde. Eine solche aber ist bei dem traditionellen Wahrheitsbegriff stets mit intendiert.

Hierin also dürfte die eigentliche Schwierigkeit dieses pragmatischen Wahrheitskriteriums liegen.

Fragen wir noch, ob etwa ein als Definition gefaßtes Wahrheitskriterium iteriert werden kann. Wir betrachten also den Satz: „Es ist Definition, daß Wahrheit = X ist.“ Dieser Satz ist nicht selbst eine Definition, sondern die Konstatierung einer von mir ausgeübten Tätigkeit. Er sagt: „Ich definiere, daß Wahrheit = X ist.“ Ich könnte diesen Satz zwar rein formal iterieren, aber schon der nächste Schritt der Iterierung würde einen inhaltlich falschen Satz ergeben. Daraus zeigt sich, daß dieser Satz selbst „wahr“ sein muß, d. h. für seine Geltung eines Wahrheitskriteriums bedarf. Abgesehen davon, daß die Geltung dieses Satzes davon abhängt, ob das Wollen, das zu dieser Definition führt, ein „richtiges“ ist (was die Vollziehung eines Werturteils in sich schließen würde, worauf wir hier nicht näher eingehen können), kommt hier noch das Wahrheitskriterium hinzu, welches konstatiert, ob ich „wirklich“ die in dem Satze ausgesagte Tätigkeit des Definierens ausübe. Dies aber gelingt mir durch die unmittelbar gegebene Fähigkeit des Vergleichs zwischen meiner realen Tätigkeit und dem gemeinten Satzinhalt. Es ist also hier die „adaequatio rei et intellectus“ das benutzte Wahrheitskriterium. Dieses letztere Kriterium führt die Heranziehung des Verhältnisses zum Realen unmittelbar mit sich.

Nun tritt aber hier offenbar auch die obige Bedingung a in Kraft. Es kann nämlich nicht alle Wahrheit, d. h. jeder mit Anspruch auf ontologische

gegebene. Hier verfaßt natürlich die *adaequatio*, da die *res* nicht unmittelbar gegeben vorliegt, und überhaupt der Ausdruck *res* nicht ohne weiteres sinnvoll benutzt werden kann. Hier ragt u. a. das Universalienproblem herein².

Wollte man für diejenigen Aussagen, welche in letzter Linie auf willensmäßigen geistigen Maßnahmen (Definitionen, Festsetzungen, praktischen Vorkehrungen) beruhen, auch den Wahrheitsbegriff anwenden (was der gewohnten Begriffsfaßung nicht entsprechen würde), so wäre dies ein Wahrheitsbegriff, der auf dem Umstand fußt, daß ich durch mein Erinnerungsvermögen an von mir selbst willensmäßig getroffene Festsetzungen in der Lage bin, diese dauernd festzuhalten und so deren dauernde Durchführung zu garantieren. Die auf diese Weise gewonnene Sicherheit einer ausnahmslosen Anwendung solcher Festsetzungen gibt dann die Möglichkeit, von diesen ihre ausnahmslose Durchführung auszusagen, was man dann übertragen auch als „dauernde Geltung“ bezeichnen kann.

Letzten Endes liegt hier ein durch geeignete äußere praktische Hilfsmaßnahme (Aufschreibungen usw.) unterstütztes Vertrauen in die Konstanz meiner Erinnerung (Erinnerungsvertrauen) vor, in Verbindung mit dem Festhalten eines obersten Willenszieles, aus dem diese einzelnen Willensmaßnahmen als Ableitungen desselben ihren letzten Ursprung nehmen. Der hinter diesen Maßnahmen stehende Wille aber ist seiner selbst gewiß, er vermag sich unmittelbar selbst zu erfassen in einem elementaren Akt, der mit unmittelbarer Evidenz erfüllt ist.

III.

Analysieren wir die Vorgänge, wie sie sich bei allen solchen unbegrenzten Reihenbildungen abspielen.

Wir wollen von dem Satze ausgehen, daß wir stets nur endlich viele einzelne Handlungen in einem bestimmten (also endlichen) Zeitraume ausgeübt haben können. Ich habe diesen fundamentalen Satz³ auf seine eigentlichen Grundlagen zurückzuführen und als aus einer Identität fließend nachzuweisen versucht (aus letzterem Umfande entspringt auch seine apodiktische Gültigkeit). Es können also niemals alle Schritte einer solchen

² Siehe die Behandlung in J. Geyser, „Einige Hauptprobleme der Metaphysik.“ Freiburg i. Br., 1923, Kap. 5.

³ „Metaphysik als Wissenschaft vom Letzten.“ München 1929. p. 213.

unbegrenzten Reihe wirklich ausgeführt sein. Daraus ergibt sich, wie schon oben, daß von einer unbegrenzten Reihe (insofern sie überhaupt begonnen wurde) immer nur ein endlicher Anfang, wenn auch nur in der Vorstellung, „realisiert“ sein kann. Wie aber steht es nun mit den übrigen Elementen? Diese sind hinsichtlich ihrer realen Existenz vorerst nur „möglich“. Dies führt uns darauf, hier etwas näher zuzusehen.

Die wirkliche Herstellung, Realisierung eines Elementes der Reihe, ist vom allgemeinsten Gesichtspunkte aus eine „Handlung“, und zwar eine bewußte, d. h. zielgerichtete Handlung. Jede solcher Handlungen bedarf eines gesonderten Willensaktes zu ihrer Ausführung. Ein gesonderter Willensakt werde allgemein als „Einzelakt“ bezeichnet.

Es kann nun der Fall sein, daß von einem zukünftigen Einzelakt nichts weiter bekannt ist, als daß er eben ein Einzelakt ist. Dies wäre der allgemeinste Fall. Dann würde irgendeine, in einem Einzelakt ausgeführte Handlung ein Element meiner Reihe bedeuten. Nun, mein ganzes bewußtes Willensleben ist von diesem Gesichtspunkte aus eine von mir hergestellte Reihe dieser Art. Ich habe l. c. gezeigt, wie hier der Satz von der Einheit des Bewußtseins hineinpaßt insofern, als verschiedene Einzelakte stets zeitlich hintereinander geordnet sein müssen. Ich kann mir nun die Vorstellung bilden, daß ich nach jedem schon ausgeführten Einzelakt einen weiteren ausführe. Dies ist eine „Handlungsanweisung“, welche so beschaffen ist, daß sie keine Grenze der Aktausführungen enthält. Sie ist so beschaffen, daß die Ausgangssituation nach jedem neuen Einzelakt so reproduziert ist, daß die Anweisung von neuem sinnvoll angewendet werden kann.

Wir wollen dieser gedachten Reihe, deren Elemente in der hier gedachten Form kein anderes Kennzeichen besitzen, als daß sie eben Einzelakte sind, ihrer Wichtigkeit für die folgenden Betrachtungen halber einen besonderen Namen geben und sie als „Reihe der Einzelakte“ (R. d. E.) bezeichnen.

Wie weit kann man nun in dieser Handlungsreihe vorausdenken? Ich kann auf zwei verschiedene charakteristische Weisen diese Frage erfassen.

a) Ich kann entweder in *meiner Vorstellung* die einzelnen Einzelakte, wie ich sie der Reihe nach ausführen will, schrittweise ausführen vom ersten ab. Um die Vorstellungen zu präzisieren, wollen wir unter unserer R. d. E. lauter „äußere“, also etwa *manuelle* Einzelakte verstehen. Dann haben wir die Möglichkeit, dazwischen Denkakte auszuführen, ohne daß

diese letzteren selbst unserer R. d. E. angehören. Sonst würde jeder Überlegungsakt selbst schon wieder den realisierenden Teil der R. d. E. vermehren, und diese Vermehrung wäre unübersichtlich.

Ich kann mir also die Ausführungen des von jetzt ab nächsten Einzelaktes vorstellen, wobei diese Vorstellung lediglich den auslösenden Willensentschluß zur Ausführung des Einzelaktes in Berücksichtigung zieht, ohne diesen auf irgendeine nähere Weise sonst zu bestimmen. Habe ich mir diesen vorgestellt, so kann ich dazu schreiten, mir jetzt den darauf zunächst folgenden vorzustellen. Diesen Prozeß kann ich nur ganz wenige Schritte weiterführen, so lange nämlich, als ich eine unmittelbare Anschauung einer Anzahl in eine Reihe geordneter unterschiedsloser Gegenstände festzuhalten vermag; diese Fähigkeit endet bei manchen Personen schon bei vier oder fünf Gegenständen, andere vermögen einige Schritte darüber hinauszugehen. Wird der Versuch über diese Grenze fortzusetzen unternommen, so verschwimmen alsbald die verschiedenen Einzelakte in ihrer vorgestellten Individualität, die ja nur durch ihre Stellung innerhalb der Reihe gegeben ist, sie können in ihrer Einzelheit nicht mehr fest- und auseinandergehalten werden.

b) Man kann andererseits auf den die R. d. E. definierenden Satz: „Es ist vom nächsten Einzelakte ab zu jedem schon realisierten ein unmittelbar darauf folgender Einzelakt auszuführen,“ der, wie wir sahen, eine Handlungsanweisung darstellt, reflektieren. Soll diese Reflektion eine stichhaltige, d. h. beweisbar „richtige“ sein, so kann sie nur darin bestehen, daß aus dieser Definition irgendwie legitimierte Schlüsse gezogen werden, die sich dabei also irgendwelcher berechtigter logischer Schlußformen oder kategorialer Umformungen bedienen müssen. Nur so weit sie sich solcher bedient, ist diese Reflexion berechtigt. So kann man z. B. durch gewisse kategoriale Umformungen zeigen, daß in der obigen Definition nichts enthalten ist, was die Fortsetzung der darin angewiesenen Handlungsreihe zu einem Ende führen würde, und man kann dies dann so aussprechen, daß die durch diese Handlungsanweisung definierte R. d. E. eine unbegrenzte sei.

Es ist nun von fundamentaler Wichtigkeit und führt zu weiterer Klärung, wenn wir dem Vorstehenden noch folgendes anfügen. Man könnte meinen, daß es gelingen könne, die einzelnen Schritte der R. d. E., wie sie unter a behandelt wurden, dadurch in der Vorstellung auseinanderzuhalten und damit weiterzuführen, daß man sie auf irgendeine Weise „numeriert“. Diese Numerierung würde darin bestehen, daß man den einzelnen vorge-

stellten Einzelakten der Reihe nach die Elemente einer Reihe von Marken oder Zeichen (die als Wortvorstellung oder Zeichenvorstellung aus einem im Gedächtnis bewahrten Vorrat von solchen zu entnehmen wären) eindeutig zuordnet.

Aber es ist klar, daß man damit den einzelnen Elementen der R. d. E. ein neues Unterscheidungsmerkmal beilegt, wodurch man aus der Definition der R. d. E. vollkommen heraustritt. Für unsere prinzipielle Betrachtung handelt es sich aber gerade darum, was bezüglich der R. d. E. *an sich betrachtet* zu gewinnen ist. Dies aber ist ausschließlich das unter a und b dargelegte.

Die nächste Erweiterung unserer Betrachtung geht dahin, daß wir den Einzelakten der R. d. E. nun noch besondere unterscheidende Merkmale geben, so daß ihre Ununterscheidbarkeit aufgehoben wird.

Diese Beilegung unterscheidender Merkmale soll dadurch geschehen, daß wir *die Handlungen*, von denen in der R. d. E. lediglich in der Weise die Rede war, daß es „Handlungen überhaupt“ seien, *näher bestimmen*. Hierzu ist einiges zu bemerken. Setze ich z. B. fest, daß die Handlungen stets solche seien, die mit der Hand ausgeführt werden, so ist zwar der Bereich der Handlungen eingeschränkt, aber es sind noch keine unterscheidenden Merkmale für die Elemente der Reihe festgelegt, es könnte auch stets die gleiche Hand-Handlung sein.

Nun könnte man dieser sehr inhaltsarmen Art der Bestimmung gegenüber an das entgegengesetzte Extrem denken und für jeden Schritt der R. d. E. eine bis in feine Details vorgeschriebene verschiedene Handlung festlegen. Vollständigkeit in der Festlegung der Umstände ist ja ausgeschlossen. Man würde dann, da ja zunächst als Gesamtheit der Umstände einer Handlung die gesamte Weltkonstellation des Augenblickes in Betracht käme, für jede dieser Handlungen, um sie zu realisieren, eine genau vorgeschriebene Umgebung benötigen, was sehr umständlich wäre. Zum mindesten werden wir praktisch eine stets leicht zu beschaffende Art der Umgebung, d. h. der näheren Umstände dieser Handlungen wählen, die von den sonstigen Umständen weitgehend unabhängig ist. Wir bedenken, daß es also unser Ziel sein muß, eine Gruppe von Handlungen festzulegen, welche sich zwar möglichst deutlich von anderen Handlungen absondern, unter sich aber eine möglichst einheitliche Beschaffenheit besitzen, sich stets leicht ausführen lassen und zugleich die Möglichkeit bieten, sich untereinander einfach unterscheiden zu lassen.

Handlungen folcher Art haben sich nun im Laufe der Geschichte in denkbar vollkommen diesen Zwecken angepaßter Art entwickelt in der „Herstellung von Schreibzeichen“. Diese Schreibhandlungen bestehen im weitesten Sinne darin, daß wir auf irgendeine ziemlich einheitlich gefärbte Fläche mit der freien oder mit der durch irgendein Instrument bewaffneten Hand es bewirken, daß deutlich sichtbare Unterschiede auf der vorher gleichförmig aussehenden Fläche entstehen, die wir praktisch meist von linienhafter Art wählen, die aber auch flächenhaft sein können. Solche künstliche Unterschiedserzeugungen auf sonst gleichförmigen Flächen wollen wir „Schreibfiguren“ nennen. Wir besitzen nach einiger Übung die uns von der Natur ermöglichte Fähigkeit folche Schreibfiguren einfacher Art immer wieder bei geeigneter Umgebung neu zu erzeugen, sie als gleich oder verschieden zu erkennen, sie uns ihrer Gestalt nach zu merken und sie nach dem Muster einer gemerkten Figur stets wieder so herzustellen, daß wir selbst und andere sie ihrer Gestalt nach wiedererkennen und von anderen unterscheiden. Unsere kulturelle Situation liefert stets mit Leichtigkeit diejenigen Umgebungsbedingungen, welche die Wiederausführung dieser Handlungen der Herstellung von Schreibfiguren ermöglichen. Damit besitzen wir also ein Gebiet von Handlungen, welches unseren Forderungen auf beste Weise entspricht. An diesem Gebiete als Beispiel können wir also unsere weiteren Überlegungen mit Vorteil durchführen.

Diese Schreibhandlungen machen es besonders gut möglich, einige weitere Forderungen zu erfüllen. Es ist nämlich für die Betrachtung unserer Reihen dauernd nötig, von *zukünftigen* Handlungen zu sprechen, von bewußt geplanten Handlungen, insbesondere von genau geplanten, in weitgehendem Maße also *bestimmten* zukünftigen Handlungen zu reden. Da reale Handlungen immer geeignete Vorbedingungen zu ihrer Ausführung voraussetzen, so sind aus den oben angeführten Gründen Schreibhandlungen hierzu besonders geeignet.

Natürlich würden sich unsere Überlegungen ganz ebenso an Denk- oder Vorstellungshandlungen durchführen lassen. Aber die Schreibhandlungen haben den Vorzug, daß ihre Resultate während unserer Deduktionen von selbst erhalten bleiben, so daß wir unsere Überlegungen nicht dauernd mit Einschränkungen zu belasten brauchen, welche die Unsicherheit unseres Erinnerungsvermögens nötig macht.

In den Schreibhandlungen haben wir ein Gebiet des Handelns vor uns, worin wir, ohne dauernd auf die Möglichkeit der Ausführung reflektieren

zu müssen, *in beliebig weite Zukunft hinein Handlungen planen und genau voraus bestimmen können.*

Wenden wir uns jetzt unserem Hauptgedankengang wieder zu.

Wir wollen jetzt im Gegensatz zur R. d. E., deren einzelne Elemente an sich kein Unterscheidungsmerkmal aufweisen, Reihen von Handlungen betrachten, bei denen jedes Element von jedem anderen durch bestimmte Unterscheidungsmerkmale unterschieden ist. Eine solche Reihe sei eine *V-Reihe* genannt.

Für den einfachsten Fall folcher Betrachtung würde es also genügen, wenn jedes Element einer V-Reihe ein einziges Merkmal aufwiese, welches kein anderes Element der Reihe hat, durch das also seine relative Individualität innerhalb dieser Reihe charakterisiert wäre.

Die Bestimmung folcher V-Reihen kann nun auf zwei prinzipiell verschiedene Arten geschehen.

a) Es wird das charakterisierende Unterscheidungsmerkmal jedes neuen Gliedes erst dann gewählt, wenn das Glied wirklich zur vorstellungsmäßigen Herstellung, zur Planung kommt. Keine Bestimmung eines Gliedes der Reihe ist also durch die Bestimmung früherer Glieder der Reihe schon festgelegt, diese Bestimmungen sind „unabhängig“ voneinander. Eine solche V-Reihe könnte z. B. beginnen mit:

K, ?, +, 2, „, Ω .

Über die weiteren Glieder ist nichts bestimmt, als daß sie Schreibzeichen sein sollen. Die weiteren Glieder sind also nicht individuell bestimmt. Für diese gilt also das, was oben von der R. d. E. gesagt wurde, sie können nicht auseinandergehalten, nicht unterschieden werden. Eine Reihe folcher Art soll eine „Wahlreihe“ heißen.

b) Die Unterscheidungsmerkmale der Elemente der Reihe werden nicht erst bei der Herstellung jedes einzelnen Elementes gewählt, sondern werden von vorneherein, vor Aufstellung der Reihe, festgelegt. Wir nennen diese Festlegung die „Herstellungsregel der Reihenelemente“.

Die Herstellungsregel muß geeignet sein, für eine unbegrenzte Reihe von Elementen jeweils verschiedene Unterscheidungsmerkmale zu liefern. Die Regel selbst aber muß *in endlich vielen Worten und Zeichen vollständig aus[sprechbar] sein*, weil sie sonst nie fertig vorliegen könnte. Daraus ergibt sich, daß sie in einer Anweisung bestehen muß, um mindestens zu jedem schon hergestellten Element der Reihe ein von allen schon hergestellten verschiedenes Element herzustellen. Da sie wegen ihrer Endlichkeit nicht

für jedes Element eine gefonderte Herstellungsanweisung enthalten kann, muß sie sich des Mittels bedienen, anzugeben, wie aus einem oder mehreren schon gewonnenen jeweils ein neues Element gewonnen werden kann, und dies in einer Fassung, daß die gleiche Regel unbegrenzt weiter anwendbar ist, wie dies eben das Wesen des regressus in infinitum ausmacht.

Ein sehr einfaches Beispiel bildet die Reihe:

I, II, III, IIII, . . .

mit der Regel, daß ein Element entsteht, indem dem vorhergehenden noch ein Strich angefügt wird, ausgehend von einem ersten Strich als Anfangselement. Ein Beispiel einer komplizierteren Reihe bildet die Reihe der arabischen Zahlzeichen, welche zehn unabhängige Grundzeichen aufweist, vom zehnten Zeichen ab aber mittels dieser nach Regel weitergeführt wird.

Alle diese Regeln besitzen notwendig das Gemeinsame, daß sie ein oder einige unabhängige Ausgangszeichen, Grundzeichen angeben und sodann eine Regel wie zu irgendeinem Zeichen sein folgendes gewonnen werden kann.

Damit erscheinen die Zeichen einer solchen Reihe in einer gewissen Art bestimmt. Wir sehen, daß jede Zeichenherstellung eine Handlung bedeutet, daß jede äußere Handlung aber eine komplizierte Umgebung besitzt. Wir unterscheiden daher drei Arten von Eigenschaften an diesen Handlungen:

a) Die irrelevanten Umgebungseigenschaften. Diese sind z. B. verschiedene, wenn ich in meinem Zimmer oder im Garten schreibe.

b) Die relevanten Umgebungseigenschaften oder die gemeinsamen Eigenschaften für alle meine hier behandelten Handlungen. Diese lassen sich im vorliegenden Falle zusammenfassen in der Aussage, daß die Handlungen Ausführungen von Schreibzeichen sein sollen. Praktisch sind diese Eigenschaften meist noch enger umschrieben, indem diese Schreibzeichen auf einem oder einer zusammengehörigen Gruppe von Papierstücken Platz finden sollen.

c) Die charakterisierenden oder Einzeleigenschaften der betreffenden Schreibzeichen.

Von der Eigenschaftsgruppe a wird abgesehen. Die Eigenschaftsgruppe b bildet das gemeinsame Milieu, den einheitlichen Hintergrund, der vorhanden sein muß, damit sich die Eigenschaften der Gruppe c deutlich abheben. Diese Umstände ermöglichen es nun erst, daß ich mich bei der Festlegung der Reihe, bei der Aufstellung der Herstellungsregel auf die Angabe der Gruppe c beschränken kann. (Bei Verwendung von konventionell geläufi-

gen Zeichen, wie Zahlen, Buchstaben, wird dabei nicht gestaltliche Identität, d. h. geometrische Kongruenz verlangt, sondern nur so viel an Gestaltgleichheit, daß die Zeichen wiedererkennbar sind. Dies soll hier nicht weiter analysiert werden.)

Damit ist nun erreicht, daß die an sich komplizierten Handlungen der Zeichenherstellung allein durch Angabe der beliebig einfachen Eigenschaften der Gruppe c charakterisierbar sind. Die Zeichen erscheinen damit allein durch Angabe ihrer c-Eigenschaften bestimmt.

Nennen wir zwei Zeichen, welche die Wiedererkennbarkeitseigenschaften gemeinsam haben (deren nähere Analyse wir hier übergangen), „zeichen-gleich“, und präzisieren wir die c-Eigenschaften so, daß sie die Wiedererkennbarkeitseigenschaften der herzustellenden Zeichen vollständig bestimmen, so sagen wir, besonders bei Reihen aus konventionellen Zeichen, daß die Herstellungsregel in diesem Falle die Elemente der Reihe „eindeutig bestimmt“.

Damit haben wir einen genauen Inhalt gewonnen für diese in der ganzen Mathematik fundamentalen, aber bisher stets nur anschaulich bzw. praktisch handwerklich benutzten Begriffe. Das dabei verwendete Verfahren kann als „synthetisch-pragmatisch“, d. h. bewußt-zielgerichtet praktisch aufbauend für den erstrebten Zweck bezeichnet werden.

Auf diese Weise wird es nun verständlich, wie durch eine endliche Herstellungsverfahren eine unbegrenzte Reihe von *Handlungen*, speziell von Zeichenherstellungen, *eindeutig bestimmt* sein könne. Nennen wir eine solche Reihe, wie sie eben behandelt wurde, eine „gesetzmäßige, unbegrenzte Reihe“, kurz u-Reihe, dann kann von dieser immer nur ein endlicher Abschnitt realisiert sein. Das Vorstehende zeigt nun, inwiefern es möglich ist, von den nicht realisierten Elementen einer u-Reihe (mag nun diese Realisierung in der Vorstellung oder in der äußeren Realität als Schreibzeichen erfolgen) als von eindeutig bestimmten möglichen, d. h. stets als ausführbar anzusehenden Handlungen zu sprechen. Dieses Verhältnis ist genau das gleiche, wie es bei irgendeinem unendlichen Regreß für die nichtrealisierten Glieder des Prozesses auftritt⁴.

Von hier führt nun der Weg direkt zu den fundamentalen Begriffen der

⁴ Die vorstehenden Betrachtungen über das Problem der „Gegebenheit“ der Elemente von u-Reihen (die eine sozusagen realistische Auffassung derselben ermöglichen) sind eine weitere Unterbauung von Formulierungen, die ich zuerst in „Das Prinzip der logischen Unabhängigkeit usw.“, München 1915, und dann in meinem Aufsatz „Über wohlgeordnete Mengen“, Math. Ann. LXXIX (1918), gegeben habe.

Mathematik (im heutigen Sinne als symbolische, von der Arithmetik ausgehende Kalkül-Wissenschaft), die ja in ihrer Gesamtheit nichts anderes ist als ein gigantisches Gebäude der Anwendung und Erweiterung der im Vorstehenden behandelten u-Reihen. — Ich gestatte mir die vorstehenden bescheidenen Betrachtungen Joseph Geyser zu seinem sechzigsten Geburtstag zu widmen als kleinen Beitrag zu einem Gebiete, von dem dieser Forscher einmal ausgesprochen hat, daß die Erforschung der Grundlagen der Mathematik an denjenigen Stellen, wo sie mit der Philosophie untrennbar zusammenfließen, eine der wichtigsten Aufgaben der heutigen Erkenntnisforschung bedeute.

B. Erkenntnistheoretische Probleme