

## Der Folgerungsoalcul und die Inhaltslogik.

Unter den Vertretern der algorithmischen Folgerungslehre ist es eine häufige Behauptung, dass nur die „Interpretation“ aller Urtheile als Classenurtheile zu einem schliessenden Calcul führen könne. Es sei, meinen sie, dem Logikcalcul wesentlich, ein Classencalcul zu sein. In einem gewissen Widerspruch zu solchen Ansichten stehen nun freilich die Versuche von JEVONS und WUNDT, bei dem Aufbau ihrer Algorithmen den Gesichtspunkt des Inhalts vor dem des Umfangs zu bevorzugen. Aber eine genauere Analyse dieser Algorithmen zeigt, dass dieselben, trotz gegentheiliger Absicht, im Wesentlichen Umfangsalgorithmen sind, und dass ein gewisses Schwanken zwischen beiden Gesichtspunkten der Klarheit und Consequenz ihrer Entwicklung zum Schaden gereicht. Bei JEVONS liegt die Sachlage klar zu Tage, sowie man dessen Identitätsbegriff — und alle Urtheile reducirt er auf Identitäten — in seine verschiedenen Wendungen verfolgt. Man sieht dann, dass jede Aussage, die überhaupt einen allgemeinen Terminus enthält, nur auf dem Wege über die äquivalente Classenaussage zu einer Identität führt. Wenn JEVONS<sup>1)</sup> ansetzt „Circle = Curve of least perimeter“, dann kann sich das Identitätszeichen doch nicht auf die beiderseitigen Begriffsinhalte beziehen; desgleichen nicht auf die Identität eines einzelnen Gegenstandes, der unter beide Inhalte fällt, da die Gleichung doch ein universelles Urtheil vertreten soll. Es bleibt also nur übrig, dass die Identität die beiderseitigen Classen betrifft, und damit stehen wir wieder in der Umfangslogik.

Und Aehnliches gilt für die Darlegung WUNDT's. Er hebt mit inhaltslogischen Betrachtungen an, geräth aber unvermerkt in die Umfangslogik, indem er z. B. dem Wortlaut nach zwar eine „Summation der Begriffe“, aber der Sache nach eine

<sup>1)</sup> The Principles of Science (1833) S. 38.

Summation ihrer Classen definiert<sup>1)</sup>. Es entspricht nicht meinen Zwecken, tiefer in die Kritik dieser scheinbar inhaltslogischen Versuche einzugehen. Genug, ich mache den überzeugten Umfangslogikern das Zugeständniss, dass bisher nur auf ihrem Wege consequente Entwicklungen algebraischer Methoden der Folgerung erzielt worden sind<sup>2)</sup>. Damit werden sie freilich wenig zufrieden sein: sie haben nicht bloss behauptet, sondern auch argumentirt; durch a priorische Gründe meinten sie darthun zu können, dass ein Inhaltscalcul als solcher unmöglich und der Umweg über die Classen somit unausweichlich sei. Dies geschah z. B. von Seiten VENN's in seiner Symbolic Logic und neuerdings wiederum von Seiten E. SCHRÖDER's, den man wohl den extremsten Vertreter der Umfangslogik (ist sie ihm doch statt einer blossen Methode der Deduction, die deductive Logik selbst!) nennen kann. Das beste Gegenargument ist ein fait accompli. Ich werde zeigen, dass nicht auf eine, sondern sogar auf mehrfache Weise ein Calcul reiner Folgerungen auf Grund streng inhaltslogischer Betrachtungen construiert werden kann. Es ist eine für den Anfang höchst frappante Thatsache, dass derselbe jeweilig so einzurichten ist, dass er identisch dieselben Formelbahnen einschlägt, wie irgend ein vorgegebener Umfangscalcul (sei es derjenige BOOLE's, oder SCHRÖDER's oder PEIRCE's u. s. w.). Diesem Umstande verdanke ich eine sonst unerreich-

<sup>1)</sup> Logik I, S. 234. Man vgl. die Beispiele.

<sup>2)</sup> Ich sage „consequente“ Entwicklungen, nicht aber „logisch unanfechtbare“. In der That liegt die Logik des Logikcalculs noch sehr im Argen. Weder in Betreff der Grenzen dieser Disciplin, noch ihres Verhältnisses einerseits zur deductiven Logik, und andererseits zur Arithmetik besteht auch nur eine entfernte Klarheit bei ihren Vertretern. Die logischen Betrachtungen, auf welchen die Technik aufgebaut wird, sind meist von einer Art, dass sie schon der flüchtigsten Prüfung nicht Stand halten, und tritt nun gar der Calcul mit dem grossartigen Anspruch auf, eine völlig reformirte und jetzt erst die „exacte“ Logik zu sein, so ist es wohl begreiflich, dass gerade die wissenschaftlicheren Logiker sich ihm gegenüber meistens ablehnend zu verhalten pflegen. Indessen mit der logischen Grundlegung der Arithmetik steht es genau so schwach, aber genügt dies zu ihrer Verwerfung? Ich glaube, dass auch die logische „Algebra“, trotz ihrer so sehr beschränkten praktischen Verwendbarkeit nicht unterschätzt werden darf, und dass sie, um ihrer thatsächlichen Leistungen willen, für den Logiker von hohem Interesse sein müsste. Und die Möglichkeit solcher Leistungen ist hier wie in der Arithmetik ein ernstes Problem, das werth ist, in Angriff genommen zu werden. In einer Recension des noch mehrfach zu nennenden Werkes von E. SCHRÖDER über den Calcul (in den Gött. gel. Anz.) nehme ich übrigens Anlass, eine Reihe allgemeinerer Fragen, welche die Logik des Calculs betreffen, zu discutiren.

bare Kürze der Darstellung. Ich werde mich zu diesem Zwecke an den zur Zeit vorzüglichsten Umfangs calcul anlehnen, welchen SCHRODER in seinen „Vorlesungen über die Algebra der Logik“ entwickelt hat.

SCHRODER betrachtet in demselben den Classencalcul als eine specielle Anwendung eines allgemeineren, nämlich des „identischen Calculs“ oder, wie ich ihn lieber nennen möchte: des reinen Mengencalculs. Sind  $A$  und  $B$  zwei beliebige Mengen, dann können sie als solche offenbar nur in einer von fünf möglichen Beziehungen stehen, nämlich: 1)  $A$  schliesst  $B$  ein. 2)  $B$  schliesst  $A$  ein. 3) Beide sind identisch dieselbe Menge (sie „decken“ sich). 4) Sie stehen im Verhältniss der „Kreuzung“. 5) Sie schliessen sich wechselseitig aus. Dies sind die vollkommenen Analoga der fünf EULER'schen Sphärenverhältnisse. Betrachtet man nun Mengen in beliebiger Zahl ausschliesslich mit Rücksicht auf solche reine Mengenverhältnisse, dann ist abzusehen, dass sich aus der Kenntniss gewisser Beziehungen, auch diejenige anderer werde ableiten lassen. Dies eben besorgt auf dem symbolischen Wege der Rechnung jener „identische Calcul“. Classen sind nun besondere Fälle von Mengen, also Classenbeziehungen besondere Fälle von Mengenbeziehungen; und nur sofern sie es sind, betrachtet sie der Classencalcul, der sich also wirklich als eine specielle Anwendung des allgemeinen Mengencalculs erweist.

Ausser dieser Anwendung des genannten Calculs auf Classen, führt SCHRODER aber noch eine ganze Reihe anderer auf, darunter auch eine solche auf Begriffsinhalte<sup>1)</sup>. Wirklich können ja Begriffsinhalte (das Wort in dem gewöhnlichen Sinne verstanden) als Merkmalinbegriffe angesehen und demgemäss mengenartig verglichen werden. Der Gesamtbegriff von Merkmalen des einen kann actuell eingeschlossen sein von demjenigen eines zweiten, oder von ihm ausgeschlossen u. s. w. Derart wird die Anwendung des identischen Calculs möglich, und es entsteht ein Algorithmus von Inhaltsbeziehungen. Aber freilich ein ziemlich nutzloser. Er würde weder direct noch indirect das, was man einen logischen Calcul nennt, constituiren, d. h. einen Calcul, welcher das Gesamtgebiet der reinen Folgerungen umfasst und beherrscht. Nur analytische Urtheile im Sinne KANT's, also kategorische Urtheile, bei denen der Prädicatsbegriff actuell im Subjectbegriff enthalten ist, fielen in sein Gebiet. Aussagen,

<sup>1)</sup> Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exacte Logik), Leipzig, B. G. Teubner, 1890, S. 160, 7).

wie: Gold ist ein Metall, könnte er sich in der Form: „die Merkmale des Begriffes Metall sind eingeschlossen in denen des Begriffes Gold“, zurechtlegen. Nicht aber synthetische Aussagen der Art, wie: „Alle gleichseitigen Dreiecke sind gleichwinklig“, da die Merkmale der Gleichwinkligkeit eben nicht actuell enthalten sind in denen des gleichseitigen Dreieckes.

Es könnte aber sein, dass SCHRÖDER mit der Anwendung des identischen Calculs auf Begriffsinhalte (die er zu erläutern unterlassen hat) Anderes im Auge hatte. Er unterscheidet nämlich den „factischen Inhalt“ eines Begriffes (das ist nichts Anderes, als der Inhalt in dem gewöhnlichen Sinne der Logik) von dem „idealen“. Dieser umfasst die Gesamtheit gültiger Merkmale, welche einem Begriffsgegenstande als solchem zukommen; wie z. B. der ideale Inhalt des Begriffes Gold die Gesamtheit von Merkmalen umfasst, die von dem Golde als solchem gültig ausgesagt werden können. Man sieht sogleich, dass ideale Inhalte wieder eine mengenartige Vergleichung zulassen, und somit scheint einer algorithmischen Behandlung derselben durch den identischen Calcul nichts im Wege zu stehen. SCHRÖDER hat nun freilich zu erweisen gesucht, dass eine „Logik idealer Inhalte“ einen Cirkel einschliesse, und hiedurch meint er sogar die ganze bisherige Inhaltslogik von ARISTOTELES bis SLOWART zu treffen, da er sie mit seiner Fiction einer Logik idealer Inhalte identificirt. Das Letztere geht uns hier nicht an. Was das Erstere anlangt, so besteht der Kern der SCHRÖDER'schen Argumentation darin, dass er eine solche Logik deshalb für unmöglich hält, weil er ihr die Nöthigung unterschiebt, mit wirklich gegebenen idealen Inhalten zu operiren, während uns doch von der Unendlichkeit von Merkmalen eines Begriffsgegenstandes nur eine verschwindend kleine Zahl eigentlich gegeben sein könne. Diese Argumentation ist eine gänzlich verfehlte; und wie wenig sie eine ausschliessende Bevorzugung der Umfangslogik und eine a priorische Verwerfung der Inhaltslogik zu begründen vermag, lehrt die alsbald zu erweisende Thatsache, dass genau dasselbe, was eine Umfangslogik leistet, auch jene Logik idealer Inhalte zu leisten vermag; dass alle Aufgaben, welche die erstere löst, auch die andere, und dies sogar genau mit denselben Regeln, Formeln und Rechnungen, zu lösen im Stande ist. Dies wird der erste Inhaltscalcul sein, den ich hier begründe.

Ich kann mich, zumal diesem Calcul kein erheblicher Werth zukommt, kurz fassen. Ich begründe zunächst die These, dass der ideale Inhalt irgend eines Begriffes uns genau in demselben

Sinne gegeben und nicht gegeben ist, als der zugehörige Begriffsumfang. In der That ist uns auch von dem letzteren (fast immer) nur ein sehr geringer, wenn überhaupt ein Theil wirklich gegeben. Aber nach solch' einem actualen Gegebensein, im Sinne der wirklichen Kenntniss aller Begriffsgegenstände, ist nie und nirgends ein Bedürfniss. Uns genügt die eindeutig bestimmte symbolische Vorstellung der 'Gesamtheit von Gegenständen, welche die Merkmale des Begriffs zu eigen haben'. Wo immer wir in und ausserhalb der Umfangslogik mit Classen operiren, liegen ausschliesslich symbolische Vorstellungen solcher Art zu Grunde. Genau dasselbe gilt aber von den idealen Begriffsinhalten. Dass sie uns actual niemals gegeben sind, begründet noch keineswegs, wie SCHRODER meint, einen Einwand gegen die Möglichkeit ihrer logischen Verwendung, z. B. für den Aufbau einer „Logik idealer Inhalte“. Wir besitzen sie eben, ähnlich wie die Classen, in der Form eindeutig bestimmter symbolischer Vorstellungen; ihr jeweiliger Inhalt ist: 'die Gesamtheit der Merkmale, welche dem Begriffsgegenstande als solchem (d. h. Allem und Jedem, das dem Begriffe untersteht) zukommen'. Capriciren wir uns also darauf, mit idealen Inhalten zu operiren, und das wollen wir für den Augenblick, dann genügen uns völlig diese symbolischen Vorstellungen, die wir, wie man sieht, wirklich genau in dem Sinne besitzen, wie die correspondirenden Classenvorstellungen.

Mehr brauchen wir nicht, um den Calcul idealer Inhalte aufzubauen. Betrachten wir solche Inhalte als Inbegriffe ihrer Merkmale, dann bieten sie Anlass zu mengenartiger Vergleichung nach den Verhältnissen des Einschlusses, bzw. Eingeschlossen-seins, des Ausschlusses, der Kreuzung und der Deckung. Wir können also den identischen Calcul unmittelbar anwenden, indem wir seinen Zeichen die Bedeutung irgendwelcher idealer Inhalte (statt irgendwelcher Classen, wie es der Classencalcul thut) ertheilen. Der so resultirende Calcul hat aber, ungleich dem vorerwähnten Inhalts calcul, den Charakter und die Eignung eines wirklich logischen Calculs: er umfasst das ganze Gebiet reiner Folgerungen. In der That lässt sich jedes Urtheil *aequivalent* umformen in ein Urtheil über Verhältnisse idealer Inhalte (also gewissermassen in ein analytisches Urtheil) und damit ist ein jedes dem Calcul zu unterwerfen. Dem Urtheil 'Alle Menschen sind sterblich' substituiren wir das andere: 'Der Idealbegriff des Menschen schliesst ein den der Sterblichkeit', welches, obschon natürlich nicht identisch mit dem ersteren, ihm doch *aequivalent* ist. Ueberhaupt ist in jedem kategorischen Urtheil der Ideal-

begriff des Prädicats subsumirt dem des Subjects (bzw. von ihm excludirt), und mit Rücksicht darauf ist die erforderliche Transformation zu vollziehen. Negative Urtheile werden hiebei durch die ihnen äquivalenten affirmativen mit negativer Materie, particuläre durch gewisse ihnen äquivalente universelle Urtheile ersetzt, genau so wie im Umfangscalcul. Aus all' dem ersieht man bereits, dass der neue Calcul identisch dieselben Aufgaben und zwar durch identisch dieselben Formeln zu lösen im Stande ist, wie der alte und sich von diesem nur dadurch unterscheidet, dass er nie und nirgends von Begriffsumfängen, sondern statt dessen überall von idealen Inhalten redet. Die gleiche Rechnung erhält einen andern Sinn bei der Lösung der gleichen Aufgabe. Diese eine Thatsache genügt schon, um zu zeigen, dass der Classencalcul keineswegs der alleinseligmachende logische Calcul ist. Eine genauere Durchführung der eben angedeuteten Gedanken halte ich nicht für erforderlich, und dies um so weniger, als ich glaube erweisen zu können, dass sowohl dieser Inhaltscalcul als auch der alte Umfangscalcul, mit Rücksicht auf die logischen Zwecke, die sie anstreben, völlig überflüssige Umdeutungen, also Umwege beanspruchen. Ich will zu zeigen versuchen, dass genau dieselbe algebraische Technik, welche als Mengencalcul begründet, in ihren Specialisirungen als Calcul der Classen oder idealer Inhalte zur indirecten Lösung der Aufgaben einer reinen Schlusslehre dient, auch direct und ohne jene Umwege über die Umfänge oder idealen Inhalte, diesen Zwecken zu dienen vormag; mit einem Worte, dass sie unmittelbar als Calcul der Inhaltslogik (d. i. gewöhnlicher inhaltslogischer Folgerungen) angesehen und als solcher von vornherein aufgebaut werden kann.

Die Formel  $SaP$  der formalen Logik, gewöhnlich gesprochen als „alle  $S$  sind  $P$ “, hat zu Zwecken der Folgerungstechnik, sei es der primitiven der ‚formalen‘, sei es der kunstvolleren der calculirenden Logiker, eine ganze Reihe verschiedener „Deutungen“ erfahren. Ich will dieselben, unter Hinzunahme mehrerer in der wissenschaftlichen Inhaltslogik unserer Zeit auftretender Formen in drei Classen vertheilen, nämlich in folgender Art:

I. Die reinen Inhaltsdeutungen und zwar

A. ohne Inhaltsquantification.

- a) Die hypothetische Deutung: Sofern Etwas ein  $S$  ist (die Merkmale  $S$  hat), ist es ein  $P$  (hat es auch die Merkmale  $P$ ).

- b) Die negative Deutung: Es gilt nicht, dass Etwas ein  $S$  und nicht ein  $P$  sei; oder was dasselbe: Es gibt nicht ein nicht- $P$  seiendes  $S$ .

Diese beiden Elementar- und Grundformen des universellen Urtheilens haben bisher keine algorithmische Verwerthung erfahren.

#### B. mit Inhaltsquantification:

„Der ideale Inhalt von  $S$  umfasst den idealen Inhalt von  $P$ “, d. h. die Gesamtheit der einem  $S$  als solchem zukommenden Merkmale umschliesst die Gesamtheit der einem  $P$  als solchem zukommenden Merkmale. Dies ist die Grundform des Calculs „idealer“ Inhalte. Man könnte nun dieser Form, als der vollkommen quantificirten, auch zwei unvollkommen quantificirte an die Seite stellen, welche entstehen, indem man entweder  $S$  allein oder  $P$  allein in der hier betrachteten Weise quantificirt. Ich unterlasse es, sie aufzuführen, da sie kein erhebliches Interesse beanspruchen können.

#### II. Die reinen Umfangsdeutungen.

Sie entstehen durch Quantification sowohl des Subjects- als des Prädicatsbegriffs mittelst der zugehörigen Classen. Hieher gehört:

- a) die Subsumptionsform: die Classe der  $S$  ist subsumirt der Classe der  $P$ . Dies ist die Grundform für den Umfangs-calcul bei C. S. PEIRCE und SCHRÖDER.

- b) die Identitätsformen:  $\alpha$ ) die Classe der  $S$  ist identisch mit derjenigen der  $P$  seienden  $S$ ; dieselbe fundirt den Calcul von JEVONS.

$\beta$ ) Die Classe der nicht  $P$  seienden  $S$  ist eine „leere“ Classe; es ist die Form, die BOOLE verwendet<sup>1)</sup>.

#### III. Die gemischten Deutungen.

Sie entstehen, indem bald das Subject und bald das Prädicat, und zwar jeweilig allein, im Classensinne quantificirt werden. Hieher gehört die Form:

- a) Alle  $S$  sind  $P$ . Es ist die Form der traditionellen Logik. Einige Worte der Interpretation dürften hier am Platze sein.

<sup>1)</sup> Die HAMILTON'schen Formen, obgleich sie vollständig quantificirt sind, gehören nicht hieher, da keine derselben ein volles Aequivalent des universellen Urtheils bietet. Ein solches entsteht erst durch disjunctive Combination der beiden in Frage kommenden Formen „Alle  $A$  sind alle  $B$ “ und „Alle  $A$  sind einige  $B$ “, wodurch aber genau die Subsumptionsform a) hervorgeht.

Indem wir diese Form gebrauchen, bilden wir zunächst den Begriff der Classe der  $S$  (Alle  $S$ ): aber nicht diese ist das Subject der Aussage, sondern ein Gegenstand derselben als solcher. Wir gehen z. B. aus von der Vorstellung der Gesamtheit der Menschen und knüpfen daran das Urtheil: Sofern Etwas dieser Gesamtheit angehört, hat es auch die Merkmale der Sterblichkeit (bzw. das negative: Keines aus dieser Gesamtheit gibt es, das nicht sterblich wäre). Die entsprechende Form mit quantificirtem Prädicat ist:

- b) Sofern Etwas ein  $S$  ist (Ein  $S$  als solches), gehört es zur Classe der  $P$ ; z. B. Gold gehört zu den Metallen.

Ich brauche nicht zu sagen, dass dieser langen Reihe von Aussageformen keineswegs dasselbe Urtheil zu Grunde liegt. Es ist klar, dass theils in affirmativer, theils in negativer Form verschiedene Materien beurtheilt werden. Wesentlich ist jedoch der Umstand, dass alle diese Aussagen einander aequivalent sind, d. h. wechselseitig auseinander gefolgert werden können.

Unsere Tabelle liesse sich offenbar noch mannigfach erweitern. Die Formen von I B an erscheinen sämmtlich als affirmative, sind aber, genau gesehen, nicht wahrhaft affirmative, sondern hypothetische Aussagen, da im Sinne einer reinen Folgerungslehre nirgends die Existenz des Subjects vorausgesetzt werden darf. Demgemäss wäre nun auch, ähnlich wie unter Titel I A, jeder hypothetischen Form eine aequivalente negative an die Seite zu stellen, wodurch die Tabelle um eine Anzahl neuer, obschon nicht eben einfacher Formen vermehrt würde. Wir könnten ferner analoge Umformungen der Art, wie sie Jevons für die Classenurtheile voraussetzt, vornehmen, nur würde an die Stelle seines Identitätsbegriffes der diesen umfassende der begrifflichen Aequivalenz treten. Wir erhielten z. B. die Form  $S = PS$ , d. h. sofern Etwas die Merkmale  $S$  besitzt, besitzt es auch die Merkmale  $PS$  und umgekehrt. Alle Urtheile liessen sich solcher Art in Begriffsaequivalenzen transformiren, wodurch freilich ziemliche Verwicklungen resultirten.

Und auch sonst gibt es mannigfaltige aequivalente Formen, die aufzuzählen Niemand ernstlich versuchen möchte. Die Beschränkung, die ich mir in der obigen Zusammenstellung auferlegt habe, ist bedingt durch das besondere Interesse, das hier für mich massgebend ist, nämlich möglichst angemessene logische Algorithmen zu construiren. Abgesehen von den Formen, die schon zu einem logischen Calcul gedient hatten, sollten daher nur solche in Betracht gezogen werden, deren algorithmische

Behandlung entweder vermöge ihres logischen Charakters oder ihrer häufigen Verwendung im natürlichen Denken, oder der vorzüglichen Brauchbarkeit für eine technische Verwerthung sich besonders empfiehlt. Die folgende allgemeine Betrachtung, deren wir auch für die ferneren Entwicklungen bedürfen, wird dazu dienen, unsere Beschränkung zu rechtfertigen.

Vertieft man sich in die verschiedenen Versuche, die Kunst der reinen Folgerungen auf eine calculirende Technik zu bringen, so merkt man wesentliche Unterschiede gegenüber den Verfahrungsweisen der alten formalen Logik. Diese, mehr von theoretischem als von technischem Interesse geleitet, betrachtete jede Urtheils- und Schlussform für sich; die calculirende im Gegentheil sucht die Zahl der zu betrachtenden Formen möglichst zu verringern und sie insgesamt in eine gleichförmige Schablone zu pressen. Dies gelingt ihr durch das Mittel der äquivalenten Transformation der Urtheile. Alle negativen Urtheile lassen sich äquivalent transformiren in affirmative mit negativer Materie. Wozu also eine dreifache Technik entwickeln, für die rein affirmativen, rein negativen und gemischten Schlüsse? Mit affirmativen Urtheilen schliesst es sich am bequemsten — also wird grundsätzlich Alles auf affirmative Urtheile umgerechnet. Wiederum das gleiche Schicksal der Eliminirung widerfährt, und aus gleichen Gründen, den particulären Urtheilen. Es gibt gewisse universelle, die ihnen äquivalent sind, und da ein rein universelles Schliessen am bequemsten erscheint, werden alle Urtheile in eben solche transformirt. Und abermals das Gleiche erfolgt mit den singulären Urtheilen, die ja schon die formale Logik unter die universellen zu subsumiren pflegte, obgleich von einer wirklichen Subsumption keine Rede sein kann. Damit nicht zufrieden, geht die Classenlogik noch erheblich weiter: Nur auf dem Wege über die Classen glaubt sie einen Calcul begründen zu können. also werden nun alle universellen Urtheile in Classenurtheile verwandelt und mit diesen ausschliesslich operirt. So macht die calculirende Logik, wo immer es ihr bequem ist, von dem Mittel der äquivalenten Transformation der Urtheile reichen Gebrauch, nicht im Mindesten beirrt, dass sie sich hiedurch von dem Gange des ursprünglichen Denkens, und oft sehr erheblich, entfernt. Und mit vollem Rechte, wofern sie nur den Anspruch nicht mehr erhebt, statt einer blossen Technik des Folgerns, eine Logik desselben zu bedeuten. Nichts hat so viel zu der verbreiteten Missachtung des Calculs beigetragen, als die unklare Vermengung dieser beiden, so wesentlich verschiedenen Ziele, bei denen, die

ihn erfanden und die ihn vertraten. Indem wir nun, mit Rücksicht auf das in sich gewiss berechnete Streben nach der Construction eines Folgerungscalculs, Abweichungen vom natürlichen logischen Denken für zulässig erklärten, bezogen wir dies doch nicht auf eine jede Abweichung, auch wenn sie innerhalb der Schranken der Urtheilsäquivalenz fällt. Es ist klar, dass nur solche gebilligt werden dürfen, die nicht eine unnöthige Verwicklung, sowohl für den Aufbau des Calculs, als für seine Anwendung zur Folge haben. Das Princip ist hier, mit möglichst wenig Mitteln, und darin liegt schon: bei möglichst engem Anschluss an das natürliche Denken, einen schliessenden Calcul zu erzielen. Je enger wir uns an das natürliche Denken halten, um so leichter wird auch die Umsetzung der Folgerungsaufgaben in ihre Formeln, und wiederum die Umsetzung der resultirenden Formeln in die lösenden Urtheile. Dieses Princip nun schliesst aus der grossen Mannigfaltigkeit äquivalenter Aussageformen die meisten von vornherein aus. Alle die complicirteren, die wir oben andeuteten, ohne sie in unserer Tabelle aufzuführen, sind zu vermeiden, da es sicher ist, dass sie einen einfacheren Calcul zu begründen ausser Stande sind, während sie doch bei dessen Anwendung unerquickliche und überflüssige Verwicklungen voraussetzen würden. Das Ideal bestünde offenbar darin, den schliessenden Calcul von vornherein auf die primitivsten und dem natürlichen Denken geläufigsten Formen zu gründen. Von dieser Art sind nun allerdings nicht diejenigen, welche von BOOLE, JEVONS, C. S. PEIRCE, SCHRÖDER u. A. ausgewählt worden sind. Aber ihre Auswahl liegt mehr an der Zufälligkeit der historischen Entwicklung der Logik in England, als an der Sache selbst. In Wahrheit lässt sich jenes Ideal wirklich erreichen, und die alten deutschen Logiker, wie vor Allen LEIBNITZ und LAMBERT, waren auf dem Wege dazu. Es ist nicht richtig, dass sie deshalb zu keinem Ende kamen und zu keinem kommen konnten, weil sie den Umweg über die Classenurtheile vermieden; denn dieser Umweg ist wirklich ein total überflüssiger.

Heben wir nun aus unserer Zusammenstellung die algorithmisch noch nicht verwertheten Formen hervor, so sind es die folgenden: Zunächst die beiden logischen Grundformen (I A a) und b): „Sofern Etwas ein  $S$  ist, ist es ein  $P$ “ und „Es gibt nicht ein nicht- $P$  seiendes  $S$ “, welche die exacten typischen Ausdrücke alles universellen Urtheilens repräsentiren. Sofern die übrigen Formen universelle Urtheile darstellen, müssen sie daher auch diesen zu subsumiren sein, was leicht erfolgt, indem man nur auf die wirklichen Subjecte und Prädicate derselben

achtet. Für calculatorische Zwecke kommt dies aber nicht in Betracht: Jede Form gilt als eine Art Relation zwischen den Termini  $S$  und  $P$ , und eben diese Relationen sind überall andere. In dieser Hinsicht sind also auch die beiden noch übrigen Formen III: „Alle  $A$  sind  $B$ “ und „Sofern Etwas ein  $A$  ist, gehört es zu den  $B$ “, neue und wohlgeschiedene, von denen die erstere besonders häufig dem natürlichen Denken dient, wobei sie aber oft genug in dem Sinne von I A a), d. i. der primitiven hypothetischen Form, verstanden wird.

Conform mit den obigen Betrachtungen, werden wir die negative Grundform, sowie die negative Deutung von III a) (Alle  $S$  sind  $P' =$  Es gibt keines unter allen  $S$ , das nicht  $P'$  wäre) ausschliessen, da für einen Calcul die Bevorzugung des affirmativen oder, exacter gesprochen, des hypothetischen Folgers unzweifelhafte Vorthelle bietet. Die einfachste von den drei anderen Formen ist offenbar die hypothetische Elementarform; in Beziehung auf sie können die anderen schon wie Verwicklungen angesehen werden. So ist z. B. die Bedeutung der Form: „Alle  $S$  sind  $P''$ “ (d. h. „sofern Etwas der Gesamtheit der  $S$  angehört, ist es ein  $P$ “) gedanklich complicirter als diejenige der Form: „Sofern Etwas ein  $S$  ist, ist es ein  $P''$ “. Der Versuch, für einen schliessenden Calcul jene primitivste Form zu verwerthen, beansprucht daher ein besonderes logisches Interesse. Wir wollen ihn unternehmen.

Der Calcul, den wir jetzt aufbauen wollen, soll ein Calcul der Begriffsgegenstände sein, und eben dadurch wird er sich als ein wahrhaft logischer documentiren. Denn alles Urtheilen geht nicht auf Classen, nicht auf Begriffsinhalte, sondern einzig und allein auf die Begriffsgegenstände, wie bereits MILL scharf betont hat<sup>1)</sup>. Als ein allgemeiner, auf Begriffsgegenstände aufgebauter Calcul hat er natürlich von den Besonderheiten solcher Gegenstände, bzw. der sie als solche kennzeichnenden Begriffe, abzusehen, und sich einzig und allein auf die möglichen Verhältnisse, welche Gegenstände irgend welcher Begriffe als solche darbieten können, zu stützen. In dieser Hinsicht ist die Betrachtungsweise eine rein „formelle“ und alle Folgerung eo ipso nur eine hypothetische.

<sup>1)</sup> Diese Behauptung erscheint vielleicht, vernügte ihrer strengen Fassung, anstössig. Man wird einwenden, dass wir gelegentlich auch Classen und Begriffsinhalte beurtheilen können. Indessen, wo dies geschieht, sind Classen und Inhalte selbst als Gegenstände gewisser Begriffe beurtheilt, obschon natürlich nicht als Gegenstände der ihnen im ursprünglichen Sinne zugehörigen Begriffe.

**Die fünf Verhältnisse.** Discutiren wir nun die Verhältnisse, welche zwischen Gegenständen von irgend zwei Begriffen *A* und *B* statthaben können, dann ergeben sich fünf mögliche Fälle, welche eine vollständige Disjunction bilden:

- 1) Ein Gegenstand des Begriffes *A* als solcher ist auch Gegenstand des Begriffes *B*, d. h. sofern Etwas die Merkmale *A* hat, hat es auch die Merkmale *B*. — Das umgekehrte Verhältniss soll aber nicht stattfinden.
- 2) Ein Gegenstand des Begriffes *B* als solcher ist auch Gegenstand des Begriffes *A*. Nicht aber umgekehrt.
- 3) Ein Gegenstand des Begriffes *A* ist als solcher ein Gegenstand des Begriffes *B* und umgekehrt.
- 4) Ein Gegenstand des Begriffes *A* ist als solcher nicht Gegenstand des Begriffes *B*, und umgekehrt.
- 5) Ein Gegenstand des Begriffes *A* ist auch (oder ist nicht) Gegenstand des Begriffes *B*; es ist aber nicht jener als Gegenstand des Begriffes *A* auch eben solcher (oder nicht solcher) des *B*; so dass keiner der Fälle 1) bis 4) statthat.

Diese fünf Verhältnisse correspondiren genau den bekannten fünf EULER'schen Sphärenbildern für Begriffsumfänge.

Ich hebe noch hervor, und davon soll nachher Gebrauch gemacht werden, dass ebenso gut als von Verhältnissen zwischen den Gegenständen der Begriffe *A* und *B* auch von Verhältnissen dieser Begriffe selbst in Beziehung auf ihre Gegenstände gesprochen werden kann. Bei dieser Betrachtungsweise lässt die Sprache, die Analogie wohl fühlend, genau dieselben Ausdrücke zu, wie bei den Verhältnissen von Classen oder von räumlichen Gebieten. Man sagt bildlich von zwei Begriffen, dass der eine den anderen einschliesse, dass sie sich wechselseitig ausschliessen, ev. auch, dass sie sich decken, und nur im Falle der Particularität, wo in der That ein Bedingtheitsverhältniss zwischen den Begriffen fehlt, entfällt das physische Bild. Auch Ausdrücke wie: der Begriff *A* 'bedingt' den Begriff *B*, er sei sein 'Merkmal', sind zulässig. Genau in diesem Sinne ist z. B. von 'nota' in KANT's Folgerungsprincip die Rede. Die exacte Interpretation solcher Ausdrücke liegt aber immer in primitiven hypothetischen Urtheilen der Art, die wir hier voraussetzen.

Für die weitere Darlegung hätte ich der obigen Tafel möglicher Verhältnisse in ihrer Vollständigkeit nicht bedurft. Doch hebt sie die Analogie mit der EULER'schen Sphärentafel in einer Weise hervor, dass man von vornherein schon sieht,

dass der calculatorischen Umfangstechnik, die mit den Sphärenverhältnissen in so nahem Zusammenhange steht, auf unserem Gebiete eine parallele und formell identische correspondiren müsse.

Um die Beziehung unseres Calculs zum Umfangs calcul gleich von Beginn an klar hervortreten zu lassen, wähle ich zur Signirung gewisser Gegenstandsverhältnisse (oder in der anderen Betrachtungsweise: gewisser Merkmalsverhältnisse) genau dieselben Zeichen, die in der SCHRÖDER'schen Darstellung des Classencalculs für gewisse Umfangsverhältnisse zur Verwendung kommen. Auch bei der Anordnung der Definitionen, Axiome, Sätze soll dieselbe Darstellung uns soweit als thunlich leiten. Jeder Calcul beruht auf einer gewissen Anzahl von Grundformeln, auf deren ständiger Verwendung und Combination alles Rechnen in demselben sich gründet. Gelingt es uns also nachzuweisen, dass die sämtlichen, zum Aufbau des Classencalculs erwiesenermassen hinreichenden Grundformeln für unsere, begrifflich ganz anders fundirten Zeichen Giltigkeit haben, dann ist mit Strenge der Beweis erbracht, dass auch der ganze übrige Calcul, als reine Technik betrachtet, für unser Gebiet Giltigkeit habe, trotz des völlig geänderten geistigen Gehalts.

**Zeichen.** Zur Signirung der Verhältnisse 1), 2) und 3) müssten wir, unserem Vorbild folgend, beziehungsweise die Zeichen  $\langle$ ,  $\rangle$  und  $=$  verwenden; das für die Grundformeln wesentliche Zeichen ist ein aus dem ersten und dritten zusammengesetztes  $\Leftarrow$ , welches durch seine Constitution auf eine gewisse Zusammengesetztheit des hiedurch zu bezeichnenden Verhältnisses hinweisen könnte und im Classencalcul auf eine solche thatsächlich hinweist. Auf unserem Gebiet trifft dies aber nicht zu, daher die Bezeichnung hier wenig passend erscheint. In der That brauchen wir zum exacten Ausdruck des Verhältnisses 1) z. B., trotz des einfachen Zeichens  $\langle$  zwei Urtheile; es ist also ein zusammengesetztes. Dagegen ist das durch das Zeichen  $\Leftarrow$  zu signirende Verhältniss ein einfaches: Wir definiren nämlich die Signatur

$$A \Leftarrow B$$

durch den sprachlichen Ausdruck:

Sofern Etwas ein  $A$  ist, ist es ein  $B$ .

Gilt dieses Urtheil, dann besteht entweder das Verhältniss 1) oder 3), worauf das componirte Zeichen überflüssiger Weise hindeutet.

Zwei Axiome. I.  $A \in A$ .

Sofern Etwas ein  $A$  ist, ist es ein  $A$ : das Identitätsprincip.

II. Wenn  $A \in B$  und  $B \in C$  ist, so ist auch  
 $A \in C$ .

Dies ist der bekannte modus Barbara. Das Princip der Folgerung ist hierbei das KANT'sche Princip *nota notae est etiam nota rei ipsius* (oder genauer: *notionis ipsius*<sup>1)</sup>).

Die beiden Axiome sind die Aequivalente der beiden ersten „Principien“ SCHRÖDER's<sup>2)</sup>.

Die Definition der Aequivalenz. Wenn  $A \in B$  und zugleich  $B \in A$  ist, so schreiben wir

$$A = B.$$

Diese Definition drückt symbolisch aus, dass zwischen den Gegenständen der Begriffe  $A$  und  $B$  das Verhältniss 3) bestehe. „Aequivalent“ sind hier die Begriffe in Beziehung auf ihre Gegenstände. Im Classencalcul entspricht diesem Verhältniss die Identität der Classen<sup>3)</sup>.

Definition des Productes  $A \cdot B$ . Unter  $A \cdot B$  verstehen wir den Gegenstand des Begriffes, welcher zugleich die Merkmale von  $A$  und diejenigen von  $B$  und nur diese allein (also die Summe der Merkmale beider) umfasst.  $A \cdot B$  ist also „Etwas, das zugleich ein  $A$  und ein  $B$  ist“.

Es gilt nun das Axiom:

III. Wenn  $C \in A$  und zugleich  $C \in B$  ist, so ist auch  
 $C \in A \cdot B$ .

Z. B. Ein vollkommener Mensch (sc. als solcher) ist tugendhaft. Ein vollkommener Mensch ist weise. Also ist ein vollkommener Mensch zugleich tugendhaft und weise.

Dieses Axiom correspondirt SCHRÖDER's (angeblicher) Definition des Classenproducts<sup>4)</sup>.

Definition der Summe  $A + B$ . Unter  $A + B$  verstehen wir den Gegenstand des Begriffes „Entweder  $A$  oder  $B$ “; oder wenn man will: den Gegenstand irgend eines Gattungsbegriffs, der die Begriffe  $A$  und  $B$ , als seine Arten umfasst. Die Disjunction soll hier nicht im exclusiven, sondern im inclusiven Sinne verstanden werden.

<sup>1)</sup> Wie HÜFLER, Logik, Wien 1890, S. 168 richtig bemerkt.

<sup>2)</sup> a. a. O. S. 168 und 170.

<sup>3)</sup> Vgl. SCHRÖDER a. a. O. S. 184.

<sup>4)</sup> a. a. O. S. 196. Vgl. meine demnächst erscheinende Kritik in den Gött. gel. Anz.

Es besteht nun das Axiom:

IV. Wenn  $A \in C$  und zugleich  $B \in C$  ist, so gilt auch  
 $A + B \in C$ .

Z. B. Jeder tugendhafte Mensch ist lobenswerth; jeder weise Mensch ist lobenswerth. Also ist jeder, sei es tugendhafte, sei es weise Mensch lobenswerth.

Dieses Axiom correspondirt SCHÖNENBERG's Quasi-Definition der Classensumme. (a. a. O.)

Definition der 1. 1 sei das Zeichen für den Gegenstand des Begriffes der Existenz, des Seins im Sinne der Wahrheit.

Demgemäss gilt das Axiom:

V. Es ist  $A \in 1$ , was auch immer  $A$  bedeute.

Man darf diese Formel nicht etwa lesen:  $A$  (z. B. Gold, ein rundes Viereck, u. s. w.) ist ein Existirendes; sondern: sofern Etwas ein Gegenstand des Begriffes  $A$  ist, ist es auch ein solcher des Existenzbegriffes. Und dies ist wirklich evident. Das Urtheil 'Etwas ist ein  $A$ ' schliesst wie jedes kategorische Urtheil die Existenz des Subjectes ein.

Definition der 0. 0 sei das Zeichen für den Gegenstand des Begriffes der Nichtexistenz. Es bedeutet also 'Etwas, von dem es gilt, es sei nicht im Sinne der Wahrheit'.

Demgemäss gilt das Axiom:

VI. Es ist  $0 \in A$ , was auch immer  $A$  bedeute.

D. h. Sofern Etwas das Merkmal der Nichtexistenz besitzt, besitzt es auch jedes andere Merkmal. In der That: ist  $n$  irgend ein Nichtexistirendes, so ist auch  $nA$  ein Nichtexistirendes, welcher Begriff  $A$  auch sei; somit fällt jeder Gegenstand des Begriffes 0 zugleich unter jeden anderen Begriff  $A$ .

Ich will an dieser Stelle auch noch den Sinn von Formeln wie  $A \in 0$ , die mitunter auftreten, erläutern, da sie dem ersten Anschein nach ganz paradox sind und der allgemeingültigen Formel V.  $A \in 1$  direct zu widersprechen scheinen. Und wirklich besagt die erstere Form: Sofern Etwas ein Gegenstand des Begriffes  $A$  ist, ist es auch Gegenstand des Begriffes der Nichtexistenz. Die zweite aber: Sofern Etwas Gegenstand des Begriffes  $A$  ist, ist es auch Gegenstand des Begriffes der Existenz. Der Widerspruch ist offenbar. Aber er ist auch legitim, sowie wir annehmen, dass ein  $A$  als solches nicht existiren könne. Gibt es kein  $A$ , dann ist es wahr, dass, wenn es ein  $A$  gäbe.

es unter den Begriff des Existirenden, und wiederum, dass es unter den Begriff des Nichtexistirenden fallen müsste. Das geht mit ganz natürlichen Dingen zu. Die Hypostasirung der Existenz eines Nichtexistirenden implicirt eben eo ipso einen Widerspruch. Aus diesem Grunde nun wird es begreiflich, dass die Formel  $A \notin 0$  im Calcul als Vertreter des ihr äquivalenten Urtheils „ $A$  existirt nicht“ betrachtet werden darf.

**Theoreme.** Die bisher entwickelten formellen Grundlagen genügen, um, wie SCHRÖDER (C. S. PEIRCE folgend) gezeigt hat, eine grosse Reihe von Theoremen, z. B.

$$A \cdot A = A; \quad A + A = A;$$

ferner die Gesetze der „Commutation“ und „Association“ bezw. für die Multiplication und Addition, d. i.

$$A \cdot B = B \cdot A, \quad A + B = B + A;$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, \quad A + (B + C) = (A + B) + C,$$

und andere mehr rechnerisch zu erweisen. Wir nehmen dieselben für uns in Anspruch, da es bei solchen rechnerischen Deductionen nie und nirgends auf die ursprünglichen Begriffe, sondern ausschliesslich auf die Regeln der Zeichen, welche in den Grundformeln ausgedrückt sind, ankommt. Viele dieser Sätze leuchten übrigens auch als unmittelbare Axiome ein, sowie man auf die Bedeutung der Zeichen recurrirt. Zu den mit diesen Hilfsmitteln erweisbaren Sätzen gehört auch das Theorem

$$AB + AC \notin A(B + C),$$

„die beweisbare Subsumption des Distributionsgesetzes“ bei SCHRÖDER<sup>1)</sup>. Nicht aber das correspondirende Theorem

$$\text{VII. } A(B + C) \notin AB + AC,$$

SCHRÖDER's „unbeweisbare“ Subsumption desselben Gesetzes<sup>2)</sup>. Dieses Theorem wird durch die auf der Hand liegende Argumentation von JEVONS bewiesen. Die linke Seite des Ausdrucks besagt: Sofern Etwas zugleich  $A$  oder: Entweder  $B$  oder  $C$  ist. Dieses selbe Etwas ist nun offenbar entweder zugleich  $A$  und  $B$  oder zugleich  $A$  und  $C$ . Eben dies besagt aber die rechte Seite des obigen Ausdrucks. — Beide Theoreme ergänzen sich nun, zufolge der Definition der Aequivalenz zu dem „vollen“ distributiven Gesetze:

$$\text{VII}^a. \quad A(B + C) = AB + AC,$$

einer Hauptformel des Calculs.

<sup>1)</sup> a. a. O. S. 280.

<sup>2)</sup> a. a. O. S. 282 u. ff.

**Definition der Negation.** Unter  $A_1$  verstehen wir das non- $A$  im gewöhnlichen Sinn der Logik; d. h. Etwas, dem das Merkmal zukommt (von dem ausgesagt werden kann) es sei nicht  $A$ .

Mit Hilfe dieses Begriffs ergeben sich die axiomatischen Formeln

$$\text{VIII. } A \cdot A_1 \in 0 \text{ und } 1 \in A + A_1.$$

Die erste darf, nach einer vorgängigen Bemerkung, gelesen werden in der Form: Was zugleich ein  $A$  und ein nicht- $A$  ist, existirt nicht. Die zweite besagt: Sofern Etwas unter den Begriff der Existenz fällt (oder was gleichwerthig ist: Alles, was existirt) ist entweder ein  $A$  oder ein non- $A$ .

Negative Urtheile behandelt der Calcul nicht direct: sie werden durch affirmative (recte hypothetische) mit negativer Materie ersetzt.

Hiemit haben wir unser Ziel erreicht: wir haben sämtliche formelle Grundlagen, auf denen der Classencalcul ruht, als gültig erwiesen für die Verhältnisse der Begriffsgegenstände, also die Technik jenes Calculs mit einem Schlage umgestempelt in einen direct und eigentlich logischen Calcul. Jede beliebige Formel, die SCHRÖDER oder Andere hergeleitet, jede Methode, die sie ersonnen haben, dürfen wir für uns in Anspruch nehmen. Wir können demgemäss jede logische Aufgabe, die überhaupt in unseren Kreis fällt, direct und ohne den Umweg über die Classen lösen bei identisch denselben Rechnungen, welche der Classencalcul erfordert. Damit ist die Umfangslogik endgültig als überflüssig erwiesen.

Wir haben unserem Calcul die Form des reinen Inhaltsurtheils, Sofern Etwas ein  $A$  ist, ist es ein  $B$  zu Grunde gelegt. Könnten wir nicht auch eine der anderen Formen, z. B. „Alle  $A$  sind  $B$ “ zu gleichen Zwecken benutzen und auch auf sie einen logischen Algorithmus gründen? Gewiss, antworte ich, und nichts ist leichter als ihn zu construiren, da er abermals formell identisch ist mit den bisher ausgebildeten Calculn, wofern wir nur die Definitionen und Symbole passend wählen.

Ich knüpfe an eine frühere Bemerkung an, dass die im vorigen Calcul benutzte Urtheilsform auch als eine Relation zwischen den Begriffsinhalten angesehen werden kann. Der Begriff  $A$  steht zu dem Begriffe  $B$  eben in der Relation, dass sofern Etwas dem ersteren, es auch dem letzteren untersteht. Demgemäss lässt sich der ganze Calcul auch ansehen als ein solcher für diese Verhältnisse von Begriffen. Bei dieser Auf-

fassung bezögen sich die Definitionen aber nicht auf die Gegenstände, sondern auf die Begriffe selbst.  $A \cdot B$  würde dann bedeuten die Merkmalsumme von  $A$  und  $B$ ;  $A + B$  den disjunctiven Begriffsinhalt  $A$  oder  $B$ .  $1$  den Begriff der Existenz u. s. w. Erst die Formeln, wie  $A \in B$  brächten in den Verbindungszeichen der Termini die Relation zum Ausdruck.

Diese Auffassung lässt sich nun sofort übertragen. Wir betrachten wiederum die Form 'Alle  $A$  sind  $B$ ' als eine Relation zwischen den Begriffsinhalten  $A$  und  $B$ . Der Inhalt  $A$  steht zu dem Inhalt  $B$  in der Relation, dass die Gesamtheit der Gegenstände, welche dem ersteren unterstehen, auch dem letzteren unterstehen müssen. Sämmtliche Definitionen (auf die Begriffe bezogen, wie wir es eben festsetzten) behalten wir nun bei, ertheilen aber dem Zeichen  $\in$  die Fähigkeit, die neue Relation auszudrücken. Nichts ist weiter nöthig; denn nun gelten auch für die neuen Relationen alle Axiome I bis VIII, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil sie logisch äquivalent sind mit den bezüglichen Axiomen für die früheren Relationen und Zeichen. Hiemit aber ist der ganze Calcul übertragen, als nothwendige Consequenz der Definitionen und Axiome.

Eben dasselbe gilt nun auch für die dritte Formel, die wir oben in Betracht zogen; und wir können sogleich auch weitergehen: Es gilt für jede äquivalente affirmative Form mit gleichen Termini. Eine dieser Formen ist z. B. die Umfangsform. Auch sie kann als eine Relation zwischen den Begriffsinhalten angesehen werden: Der Begriff  $A$  steht in der Relation zu dem Begriff  $B$ , dass die Classe der Gegenstände, welche die Merkmale des ersteren besitzen, subordinirt ist der Classe von Gegenständen, welche die Merkmale des letzteren besitzen. Hätten wir nun den Calcul z. B. als Gegenstandscalcul entwickelt, dann könnten wir jetzt, auf ganz analogem Wege wie vorhin, die Uebertragung desselben auf die Umfangsrelationen vollziehen. Eine andere Form ist die 'idealer Inhalte'. Wir könnten auch hier in ähnlicher Weise verfahren. U. s. w. Kurz, welche äquivalente Form mit gleichen Termini wir auch nehmen mögen: es ist a priori gewiss, dass der Calcul identisch derselbe sein müsse. In der That, da alle diese verschiedenen Relationsformen logisch äquivalente Urtheile darstellen, so können wir offenbar alle den Calcul begründenden Schritte überall genau parallel wählen, und zwar so, dass die correspondirenden Schritte entweder identisch oder äquivalent sind. Identisch sind bei passender Wahl die Definitionen, denn sie beziehen sich auf Operationen ausschliesslich an den Begriffs-

inhalten, in welche von der Verschiedenheit der Relationen nichts eintritt. Die Axiome aber, welche aus den Relationen mit Hilfe der Operationsbegriffe resultiren, sind durchweg correspondirend äquivalente Urtheile, welche, als Relationen ihrer Termini angesehen, von analoger Form sind und daher bei passender Wahl der Relations- und Operationszeichen in identisch dieselben Formeln übergehen müssen. Da solcher Art der modus procedendi stets in genau parallelen Bahnen erfolgen kann, da ferner die correspondirenden Schritte entweder identisch oder mindestens durch die geeignete Wahl der Symbolik in identischer Form auszudrücken sind, was Wunder, dass nun überall dieselben formellen Grundlagen, also auch identisch derselbe Calcul hervorgeht? So erklärt sich diese für den Anfang höchst frappante Erscheinung der Identität des Algorithmus auf so vielfach verschiedenen begrifflichen Wegen.

Daraus ergibt sich nun weiter ein wichtiges Resultat. Welche von solchen äquivalenten Formen des universellen Urtheils auch in irgend einer gegebenen Aufgabe vorliegen möge, wir brauchen niemals erst eine Umformung auf eine Normal-schablone zu vollziehen, sondern dürfen direct mit der Institution der Formeln beginnen. Sind die Urtheile als Classenurtheile zufällig gegeben, dann wenden wir den Calcul gewissermassen als Classencalcul an; sind sie als Urtheile über Begriffsgegenstände gegeben, dann rechnen wir im Gegenstandscalcul. U. s. w. Logisch mögen die zu Grunde liegenden Schlussprincipien wohl-geschiedene sein: Bald ist es das dictum, bald die nota, bald der correspondirende Classenschluss; oder sonst welche, untereinander natürlich äquivalente Principien. Rechnend merken wir von all' diesen Unterschieden nichts: die Formeln bleiben dieselben.

Die Algorithmen, die wir bisher betrachteten, erstrebten und erreichten der Hauptsache nach dieselben Ziele. Der logisch bemerkenswertheste war der Calcul der Begriffsgegenstände. Wir treten nun in ein anderes Gebiet ein, in welchem die Urtheile die Stellen der Begriffe einnehmen. Ganz analoge Verhältnisse nämlich, wie sie Begriffe in Hinsicht auf ihre Gegenstände darbieten, treten auch zwischen Urtheilen in Hinsicht auf ihre Materien auf. Die Analogie ist eine so vollkommene, dass sie wiederum identisch dieselbe algorithmische Technik begründet. Bereits BOOLE hat dies erkannt; aber auch hier liegt, wie sonst, seine Stärke mehr in der genialen Erfindung, als in der logischen Begründung. Durch höchst gewaltsame Umdenkungen erzwingt er die Subsumtion des neuen Calculs unter

den Classencalcul. Das Grundurtheil des neuen Gebiets: „Wenn das Urtheil  $A$  gilt, gilt auch das Urtheil  $B$ “ ersetzt er durch die wunderliche Form: „Zur Zeit, in welcher das Urtheil  $A$  gilt, gilt auch das Urtheil  $B$ “, deren Gedankengehalt nicht unwesentlich geändert ist. Auf die Schachtelungsverhältnisse der Zeiten ist dann der Classencalcul oder vielmehr der allgemeine Mengencalcul direct anwendbar. Der neueste Bearbeiter des Calculs, SCHÖDDE, folgt ihm auf diesen Weg, während doch schon VENN in seiner Darstellung<sup>1)</sup> die Ueberflüssigkeit desselben richtig erkannt hatte. Indessen lassen auch VENN's Darlegungen<sup>2)</sup> an Strenge und überzeugender Kraft Manches zu wünschen übrig. Er macht sich vom Classengesichtspunkt nicht völlig frei und verfehlt (wie übrigens auch im Classencalcul) einen wesentlichen Punkt, nämlich die Deutung der Zeichen 0 und 1. Ohne diese Kritik näher zu begründen, will ich mit wenigen Worten Alles, was zu einer independenten Fundirung dieses „Aussagencalculs“ nöthig ist, zusammenstellen.

Die Analoga der fünf EULER'schen Sphärenverhältnisse sind:

- 1) Wenn das Urtheil  $A$  gilt, gilt das Urtheil  $B$ , nicht aber umgekehrt. Das erstere bedingt das letztere, „schliesst es ein“, und zwar einseitig.
- 2) Wenn das Urtheil  $B$  gilt, gilt das Urtheil  $A$ , nicht aber umgekehrt.
- 3) Der Fall der Wechselbedingtheit oder der logischen Aequivalenz der Urtheile. der „Deckung“ in Hinsicht auf ihren logischen Werth.
- 4) Der Fall des wechselseitigen Ausschlusses: Wenn das Urtheil  $A$  gilt, gilt nicht das Urtheil  $B$ ; und umgekehrt.
- 5) Zwischen beiden Urtheilen findet kein Bedingtheitsverhältniss statt.

Zeichen. Die Signatur

$$A \in B$$

sei zu lesen:

„Wenn das Urtheil  $A$  gilt, gilt das Urtheil  $B$ ;  
oder kürzer: „Das Urtheil  $A$  bedingt das Urtheil  $B$ “.

Axiome. Es gelten wieder die beiden Axiome:

$$I. A \in A.$$

II. Wenn  $A \in B$  und zugleich  $B \in C$  ist, so ist auch

$$A \in C.$$

<sup>1)</sup> Symbolic Logic. London. Macmillan and Co., 1881. S. 372.

<sup>2)</sup> a. a. O. Chap. XVIII.

Die Definition der Aequivalenz. Wenn  $A \in B$  und zugleich  $B \in A$  ist, so schreiben wir

$$A = B.$$

Die Definition des Products  $A \cdot B$ . Unter  $A \cdot B$  verstehen wir die Giltigkeit der beiden Urtheile  $A$  und  $B$  zugleich.

Es besteht wieder das Axiom:

III. Wenn  $C \in A$  und zugleich  $C \in B$  ist, so ist auch  $C \in AB$ .

Die Definition der Summe  $A + B$ . Das Zeichen  $A + B$  bedeute die Giltigkeit entweder des Urtheils  $A$  oder des Urtheils  $B$ , ev. beider zusammen.

Es ergibt sich das Axiom:

IV. Wenn  $A \in C$  und zugleich  $B \in C$  ist, so ist auch  $A + B \in C$ .

Die Definition der 1. Das Zeichen 1 bedeute die Giltigkeit des Satzes: Von zwei contradictorisch entgegengesetzten Urtheilen ist eines wahr und eines falsch; also des vereinigten Principis vom Widerspruch und ausgeschlossenen Dritten.

Es besteht nun das Axiom:

Es ist

$$V. A \in 1,$$

was auch immer  $A$  bedeute.

In der That setzt die Wahrheit irgend eines Urtheils überhaupt diejenige des genannten Principis bereits voraus; ohne dasselbe gäbe es keinen Unterschied von Wahrheit und Irrthum. Wenn also irgend ein Urtheil wahr ist, so gilt auch jenes Princip.

Die Definition der 0. Das Zeichen 0 bedeutet demgemäss die Giltigkeit der Negation eben dieses Principis, also die Ungiltigkeit desselben.

Es besteht dann das Axiom:

Es ist

$$VI. 0 \notin A,$$

was auch immer  $A$  bedeute.

Und wirklich, wenn das Gegentheil des logischen Fundamentalprincipis gilt, dann besteht kein Unterschied zwischen Wahrheit und Irrthum, und es darf demgemäss jede beliebige Behauptung aufgestellt werden.

Ich glaube kaum, dass eine andere Deutung der Symbole 0 und 1 die für den Calcul nöthigen Formeln V und VI zu begründen fähig wäre.

Es gelten nun wieder alle S. 183 erwähnten Theoreme, insbesondere das volle distributive Gesetz

$$\text{VII}^a. \quad A(B + C) \in AB + AC,$$

von dessen Richtigkeit man sich durch die Uebertragung in den sprachlichen Ausdruck sofort überzeugt.

Die Definition der Negation.  $A_1$  bezeichne die Ungültigkeit des Urtheils  $A$ .

Selbstredend gelten nun auch die Axiome:

$$\text{VIII.} \quad AA_1 \in 0 \text{ und } 1 \in A + A_1.$$

Damit haben wir die sämtlichen, für den Aufbau der ganzen Zeichentechnik des Calculs hinreichenden Grundformeln erwiesen und somit den „Aussagencalcul“ ganz und gar aus eigenen Mitteln begründet.

Halle a. S.

E. G. HUSSERL.