Die Paradoxien der Mengenlehre.

Von

Hans Lipps (Göttingen).

In der vorliegenden Untersuchung ist es auf eine Lösung der Paradoxien abgesehen, mit denen die Mengenlehre belastet ist. Freilich ist von Zermelo eine Axiomatik aufgestellt worden, welche die Bildung der paradoxen Mengen ausschließt, und die anderseits genügt, um die mathematisch wichtigen Sätze der Mengenlehre abzuleiten. Damit sind indessen die fraglichen Paradoxien nur vermieden worden. Der Kern ihres dialektischen Scheins bleibt unaufgedeckt. Insonderheit wurde nicht das Bedenkliche der logischen Paradoxien vermindert, die zwar nicht in den Bereich der Mathematik gehören, die aber nach der bisher unbestrittenen Meinung Bertrand Russells dieselbe Wurzel haben wie die ultrafiniten Paradoxien der Mengenlehre. Russell suchte den Paradoxien zuletzt durch die theory of types beizukommen. Aber damit wurde nicht mehr erreicht als eine Berichtigung. Der Fehler blieb unentdeckt. Nur betreffs seiner Stelle konnte Russell vermuten, daß sie durch eine gewisse Eigentümlichkeit bezeichnet wird, die den paradoxen Begriffsbildungen gemeinsam ist. Es bleibt zu prüfen, ob man nicht von vornherein gehalten gewesen wäre, sich auf das unentscheidbare Widerspiel gewisser Prädikationen gar nicht einzulassen.

Wir untersuchen zuerst die Paradoxie von Russell. Eine »Menge« Y sei dahin definiert, daß sie alle Mengen enthält, die sich nicht selbst enthalten. Eine Menge enthält sich oder enthält sich nicht – das ist eine logische Disjunktion, die für Y selber zu entscheiden ist. Enthält sich Y selbst, dann befindet es sich unter den Mengen, die wir zu Y rechnen. Wir rechnen aber zu Y diejenigen Mengen, die sich gerade nicht selbst enthalten. – Und enthält sich Y nicht selbst, so ist es gerade eine der Mengen, die wir zu Y rechnen. Woraus folgt: Y enthält sich selbst. Beide einander kontradiktorisch entgegengesetzten Annahmen führen demnach zu einem Widerspruch.

Diese Paradoxie war für Kronecker und Poincaré[1]) Anlaß, die Mengenlehre von Georg Cantor abzulehnen, der sich durch die Einführung des aktual Unendlichen anscheinend der Möglichkeit begeben hatte, den Bereich einer Menge so abzustecken, daß man vor dem Auftreten in sich widerspruchsvoller Elemente gesichert war. Es gelang aber Russell, die Paradoxie der Y-Menge auf eine Form zu bringen, welche die Unendlichkeit einer Menge gar nicht in Anspruch nimmt: Es gibt Prädikate, welche von sich selber ausgesagt werden können, — z. B. »denkbar« oder »abstrakt«. Wir bezeichnen sie mit »prädikabel«. »Prädikate«, die nicht von sich selber ausgesagt werden können — z. B. »tugendhaft« — nennen wir »imprädikabel«. Die Disjunktion zwischen prädikabel und imprädikabel ist vollständig. Demnach ist auch das Prädikat »imprädikabel« entweder prädikabel oder imprädikabel. Ist es prädikabel, so heißt das gerade: imprädikabel ist imprädikabel. Und ist es imprädikabel, dann ist imprädikabel = imprädikabel. Es liegt also — im Widerspruch zur Annahme — gerade der Fall des Prädikablen vor.

Diese beiden Formulierungen des Paradoxons legen einen Ausweg nahe, derart, wie er von Russell früher tatsächlich in der »no-class« theory versucht worden ist. Nach dieser Theorie wären alle Aussagen über Mengen sinnlos, wenn sie sich nicht in Aussagen über deren Elemente verwandeln lassen. Und man ist zum mindesten versucht, in der Illegitimität, ein Prädikat für sich — losgelöst von seinem Gegenstand — zu einem neuen Aussagegegenstand zu machen, den Ansatz zur Lösung der Paradoxie prädikabel — imprädikabel zu suchen. Diese Ausflucht entfällt aber ganz und gar bei einem von Nelson und Grelling[2]) angegebenen Beispiel. Denn hier ist es ein Ding, was den doch anscheinend untangierbaren Anspruch darauf hat, daß ihm von zwei einander kontradiktorisch entgegengesetzten Prädikaten nur eines und notwendig eines zukommt, was aber dabei so beschaffen ist, daß diese Prädikate hier gerade einander im Gefolge haben: Jedem Wort kommt seine Bedeutung entweder als Merkmal zu (z. B. dem Wort »kurz«) oder nicht (z. B. dem Worte »lang«), — es ist entweder autologisch oder heterologisch. Für das Wort »heterologisch« ist dieselbe Disjunktion triftig. Ist es autologisch, dann ist es nach Definition von »autologisch« gerade hetero-

1) »Les mathématiques et la logique« (Révue de métaph. et de mor. XIV) — La Logique de l'infini (ibid. XVII).

2) Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti. (Abhandl. d. Friesschen Schule, N. F. II, 3, S. 307.)

logisch, und ist es heterologisch, dann kommt ihm seine Bedeutung nicht zu, es ist also nicht heterologisch.

Bei diesem Beispiel setzen wir an. Die Paradoxie ist nicht einfach dahin zu erledigen, »mit der Frage, ob das Wort »heterologisch« selbst auto- oder heterologisch sei, ließe sich schlechterdings kein Sinn verbinden«.[1]) Diese Frage hätte sehr wohl einen Sinn, wenn überhaupt irgendwelche Worte autologisch oder heterologisch wären. Daß autologisch und heterologisch als Eigenschaften der Worte behandelt werden, dadurch entsteht gerade die Paradoxie. KURZ kommt »kurz« und DREISILBIG kommt »dreisilbig« als Eigenschaft zu, – in beiden Fällen wird von einem Worte seine Bedeutung ausgesagt. Die beiden Worte haben aber darum nicht eine neue gemeinsame Eigenschaft. Gewisse Eigenschaften, die zu dem konstitutiven Bestande der Worte KURZ und DREISILBIG gehören, sind je ein erfüllendes Beispiel für die Bedeutung dieser Worte. Den Worten ist nicht etwa das eigen, was sie bedeuten, – in dem Sinne nämlich, als ob in den Eigenschaften etwas anderes als die schlichte Natur der Wortdinge zum Ausdruck käme. Und die Worte meinen auch nicht geradezu eine ihrer Eigenschaften. Denn in beiden Fällen ist nur eine Identität festzustellen zwischen der lexikalischen Bedeutung dieser Worte und der lexikalischen Bedeutung des Prädikats in den Prädikationen über diese Worte »KURZ ist kurz« und »DREISILBIG ist dreisilbig«. Diese Prädikationen sind der Träger einer beiden Fällen gemeinsamen Eigenschaft. Meint man demgegenüber daran erinnern zu können, daß es ja doch das Eigentümliche gewisser Worte sei, daß das, was sie bedeuten, von ihnen prädiziert werden kann, so vergißt man, daß der erfüllende Sinn davon kein anderer als der ist, daß es KURZ eben eigen ist kurz und DREISILBIG eigen ist dreisilbig zu sein. Freilich sagen wir von KURZ aus, »daß ihm seine Wortbedeutung als Eigenschaft zukommt«. Aber das, was da logisch ausdrücklich ausgesagt wird, meint wohl eine Beschaffenheit von KURZ, ist aber keine in seiner logisch ausdrücklichen Formulierung.

Die Paradoxie des Prädikates »imprädikabel« ist ebenso zu lösen. Dafür, daß »denkbar« ein denkbares und »abstrakt« ein abstraktes Prädikat ist, ist keine neue, den beiden Prädikaten gemeinsame Eigenschaft verantwortlich zu machen. Die genannten Attribute haben nicht etwa »sich selbst« zur Eigenschaft. Denn die Inhärenz einer Eigenschaft ist keine modifizierbare Relation des

---

1) H. Weyl, Das Kontinuum, 1919, S. 2.

Dinges zu etwas. Lediglich die lexikalischen Bedeutungen sind identisch, in denen der Gegenstand der Aussage und dessen Prädikat gemeint werden. Die Eigenschaft »prädikabel« haftet nicht an den Prädikaten, sondern an gewissen Prädikationen über diese Prädikate. »Von sich selbst aussagbar« ist keine Möglichkeit, für die ein Prädikat von sich aus in einem anderen Sinne aufkommen kann, als in dem, daß es je denkbar oder abstrakt ist. Weder das Prädikat »prädikabel« noch das Prädikat »imprädikabel« kann attributiv zu einem Prädikat gehören, und insofern ist die Paradoxie erledigt.

Die Frage, ob ein Prädikat nicht von sich selbst aussagbar ist, ist demnach keine andere als die, ob die Prädikationen, die nur irgend möglich sind inbezug auf dieses Prädikat, allgemein eine gewisse Eigenschaft erfüllen, ob es allgemein richtig ist, daß ein Prädikat in keiner anderen als in Prädikationen einer gewissen Eigenschaft vorkommt. Darin kann aber eine Paradoxie von anderem Typ angelegt sein: Wenn nämlich ein Ding, von dem es allgemein richtig ist, daß es in keiner Prädikation von der Eigenschaft p vorkommt, eben dadurch in eine p-Prädikation gerät. Indessen fehlt es dann auch an einem Anlaß, die allgemeine Richtigkeit der Prädikation, die als Instanz gegen sich selbst auftritt, auch nur probeweise anzusetzen. Die Versuchung dazu entsteht lediglich aus dem Vorurteil, es stehe dabei das Vorhandensein einer Eigenschaft in Frage. Denn das wäre freilich peinlich, wenn irgendeine Eigenschaft einem Ding nicht entweder zukäme oder nicht[1]) und wenn formal nicht beides möglich wäre. Der sogenannte »Satz vom ausgeschlossenen Dritten« ist deshalb zu dem formal-ontologischen Satz zu präzisieren: Es ist unmöglich, daß einem Ding eine Eigenschaft weder zukommt, noch nicht zukommt. Und daneben gibt es den Satz: Es ist unmöglich, daß einem Ding eine Eigenschaft zukommt

---

1) Zwingend in diesem Sinne ist z. B. die Alternative, mit der die »Paradoxie der endlichen Bezeichnung« eingeleitet wird, daß nämlich eine Zahl entweder endlich darstellbar ist oder nicht. Denn darin dokumentiert sich freilich eine Eigenschaft der rationalen Zahlen, daß sie — nämlich diese Zahlen selbst — in endlich vielen Ziffern oder Zeichen aufgeschrieben werden können. Fürs Zweite wird in der genannten Paradoxie die Tatsache angesetzt, daß eine Reihe rationaler Zahlen nach dem Diagonalverfahren eine nicht darstellbare irrationale Zahl u definiert. Durch Angabe dieser Definition in endlich vielen Worten sei aber gerade eine endliche Darstellung von u erreicht worden. Die Lösung der Paradoxie ist einfach. Daß es zu einer Zahl eine Prädikation von gewisser Beschaffenheit gibt, ist überhaupt keine Eigenschaft dieser Zahl, die im besonderen nicht selbst in den Buchstaben aufgeschrieben ist, die als ihre Definition gelesen werden.

und nicht zukommt. In dem üblichen Satz vom Widerspruch, den man als einen obersten Satz der Logik zu fixieren sucht, ist aber durchaus keine formalontologische Tatsache formuliert, sondern die lediglich durch das Bestehen eines Widerspruchs motivierte Unmöglichkeit, daß es bei eben diesem Widerspruch sein Bewenden hat.

Die Menge der Mengen, die sich nicht selbst enthalten, untersuchen wir im Sinne der üblichen Interpretation, wonach »Mengen« dasselbe sind wie Klassen oder Inbegriffe. Eine Klasse ist definiert durch eine Eigenschaft ihrer Elemente, und zu einem Inbegriffe gehört das, dessen spezifische Natur durch einen Begriff angegeben wird. Daraus, daß deshalb die Zugehörigkeit eines Dinges zu einer Klasse oder zu einem Inbegriff von vornherein feststeht, entsteht die Stringenz der Paradoxie. Und zweifellos gibt es Klassen, die »sich selbst« enthalten, in einem eigentlichen Sinne, darin anders als die Prädikate, deren »Aussagbarkeit von sich selbst« in einem entsprechenden Sinne überhaupt nicht zu halten war. Z. B. die Klasse aller abstrakten Dinge, die als ein abstraktes Ding zu sich selbst gehört. Mit einem ganz anderen Scheine des Rechts als die Nichtaussagbarkeit von sich selbst wird das Sich-Selbst-Nicht-Enthalten einer Klasse als eine Eigenschaft in Anspruch genommen, die eine neue Klasse definiert und die dann dieser neuen Klasse notwendig entweder zukommt oder nicht.

Indessen mißlingt es, das »Sich-Selbst-Enthalten« einer Klasse, worin zweifellos eine Eigenschaft dieser Klasse getroffen ist, und was nicht nur wie die Aussagbarkeit von sich selbst mit dem Bestehen einer anderen Eigenschaft in eins gegeben ist, auch als eine ausgezeichnete Stellung dieser Klasse zu dem einen ihrer Elemente festzuhalten. Denn eine Klasse kann »sich selbst« in keiner anderen Weise enthalten, als sie jedes ihrer Elemente enthält, und zu deren einem sie nur in der logischen Beziehung der Identität steht. Die Stellung einer Klasse zu ihren Elementen ist unverrückbar eine und darin gegeben, daß die Klasse lediglich intentional auf ihre Glieder bezogen ist. In ihrer logischen Funktion ist die Klasse in einer anderen Dimension gelegen als die Elemente, die sie im Griffe hat. Und nur sofern sie als Träger gewisser Eigenschaften fixiert und damit in eins intentional unwirksam geworden sind[1]), fallen gewisse

1) Ebenso treten z. B. die Zahlen innerhalb der mathematischen Operationen nicht als Gegenstände auf wie dann, wenn sie in Prädikationen eingestellt sind. Als Gegenstand gewisser Prädikationen ist 2 ein Ding, welches zusammen mit dem anderen Dinge 4 zwei Dinge von gewisser Beschaffenheit darstellt, aber nimmermehr »= 5« ist.

Klassen und gewisse Inbegriffe mit in ihre intentionale Reichweite. Das Sich-Selbst-Enthalten ist als *spezifische* Wendung einer Klasse auf »sich selbst« unvollziehbar. Daß die Klassen (oder Inbegriffe) M, N, ... »sich selbst enthalten« besagt nur, daß unter ihren Elementen je ein Element ist, welches sich zufolge gewisser Eigenschaften als identisch mit M, N, ... erweist. Das ist indessen keine gemeinsame *konstitutive* Eigenschaft dieser Klassen, wie es eine solche Eigenschaft z. B. sein würde, wenn irgendwelche Klassen alle ein gewisses Element L enthalten. Eine Klasse der Klassen, die einander nicht selbst enthalten, gibt es demnach überhaupt nicht. Solange wir nämlich daran festhalten, daß die Zugehörigkeit zu einer Klasse an eine Eigenschaft als ein Kriterium gebunden ist, d. i. an etwas, was an den Elementen der Klasse die Stelle seines Bestehens hat. Freilich kann ich unter Verwendung eines reflexiven *Ausdruckes allgemein* reden von den »Klassen, die sich nicht selbst enthalten«, d. i. ich kann durch diese Angabe einen Bereich der Triftigkeit für eine Prädikation *bezeichnen*, in der vielleicht eine tatsächlich gemeinsame Eigenschaft der Elemente dieses Bereiches festgestellt wird. Aber ich »*definiere*« in diesem Bereiche der Triftigkeit eines allgemeinen Satzes noch nichts, nämlich nicht etwas, was es »gibt« in dem Sinne von Klassen, die durch das Bestehen einer Eigenschaft an Dingen *konstituiert* sind. Nur Klassen oder dem Umfang eines begrifflichen τί zugeordnete Inbegriffe können aber in die Lage kommen, »sich selbst« zu enthalten in dem oben als zweifelsfrei festgestellten Sinn. Es bedarf durchaus keiner Einschränkung ihres Bereiches, um eine Paradoxie zu vermeiden, die durch die Erschleichung einer Eigenschaft entstanden war.

Es gibt indessen eine andere Paradoxie, die gerade aus der uneingeschränkten Triftigkeit eines logisch allgemeinen Satzes zu entstehen scheint: die Paradoxie des Kreters Epimenides, der behauptet, daß alle Kreter lügen. Die Richtigkeit des von Epimenides angeblich behaupteten Satzes steht zur Diskussion. Der Annahme dieser Richtigkeit steht das *Faktum* der Behauptung des Epimenides entgegen. Denn redet ein Kreter *allgemein* von dem, was Kreter sagen, dann ist seine Aussage *ihrer Form nach* notwendig auch triftig für den Fall seiner Rede und hätte dort ihre Richtigkeit zu bewähren. Es ist dann die Pointe der Paradoxie, daß man eben dadurch, daß man die Richtigkeit der Behauptung des Epimenides wegen ihres Widerspruchs zu dem Faktum dieser Behauptung leugnet, in die Lage kommt, diese Richtigkeit gerade wiederum zu behaupten.

Man suchte bisher den Fehler in dem Zugeständnis der logischen Triftigkeit von Epimenides' Aussage für den Fall eben dieser Ausſage. Statt deſſen hätte man fragen ſollen, ob eine Ausſage derart, wie ſie dem Epimenides zugeſchrieben wird, eine mögliche Behauptung iſt. Nämlich eine Behauptung in dem Sinne der Behauptungen von Kretern, wenn deren Richtigkeit oder Unrichtigkeit in Frage ſteht. Das iſt die Ausſage des Epimenides nicht. Denn ſie iſt widerſinnig. Es iſt nicht etwa widerſinnig, daß die Ausſage des Epimenides ihren eigenen Fall mit betrifft. Der Widerſinn entſteht, weil das gerade richtig iſt. Die Worte des Epimenides ſind ſchon als Behauptung unmöglich. Sie können nicht einmal falſch ſein. Darum können ſie zur Entſcheidung der Frage, ob die Kreter die Wahrheit ſagen oder nicht, gar nicht als Inſtanz herangezogen werden. Daß ſie eine ſolche Inſtanz ſeien, war aber die ungeprüfte Vorausſetzung der Paradoxie.

Ruſſell[1]) bemerkte, die Paradoxie des Epimenides ſei frei von den Schwierigkeiten, die durch Einführung des »allemal« entſtünden. Denn ſie ſei zu vereinfachen in »ich lüge«. Das iſt trügeriſch. Denn wenn das »ich lüge« nicht als »ich lüge allemal« verſtanden wird, iſt es ſchwer zu verſtehen, wie es überhaupt zu dem Scheine der Unwiderlegbarkeit kommen ſollte, den die Paradoxie unzweifelhaft hat. Denn dann läge ein der Form nach feſtes kategoriſches Urteil vor, welches ſich gleichſam zu überſteigen hätte, um ſein Subjekt zu bekommen, – etwas ſchon im Beginn Unmögliches. Gerade dieſe Aporie behauptet freilich Ruſſell auch für den Fall des Epimenides. Als ob das, was in den Triftigkeitsbereich eines allgemeinen Satzes fällt, darum ſchon deſſen logiſches Subjekt wäre. Nur die kategoriſche Prädikation ſetzt auch logiſch an den Dingen an, an denen ſie ihre Richtigkeit bewährt. Es iſt etwas anderes, von allen a gemeinſam p kategoriſch zu prädizieren, – und es als allgemein richtig zu behaupten, daß a p iſt unter der Formel: »a iſt allemal p.«[2]) Die Behauptung des Epimenides iſt formal richtig, und daß ſie ſich durch Widerſinn ſelbſt auslöſcht, iſt nicht die Folge eines »circulus vitiosus«.

Zur theory of types[3]) fehlt es aber dann an jeglichem Anlaß. In keiner der bisher unterſuchten Paradoxien liegt der Fehler, durch

1) Les paradoxes de la logique (Rév. de Métaph. et de Mor. XIV).

2) Das partikuläre Urteil zeigt den Unterſchied deutlicher: Im eigentlichen »partikulären« Urteil wird unter der Form »einige a ſind p« die Richtigkeit einer allgemeinen Prädikation eingeſchränkt – gegenüber Sätzen von der Form »manche a ſind p«, in denen p von gewiſſen a gemeinſam kategoriſch prädiziert wird.

3) Mathematical Logic as based on the theory of types (Americ. Journ. of Math. XXX).

den man in das Widerspiel kontradiktorisch entgegengesetzter Prädikationen gerät, an der von Russell angegebenen Stelle. Als richtiger Kern könnte der theory of types allenfalls die Tatsache zugeschoben werden, daß Inbegriffe und Klassen in ihrer logischen Funktion von dem Existenzbereiche ihrer Glieder ausgeschlossen sind. Aber als Gegenstand von Prädikationen können sie sehr wohl dazu gehören. Sie sind darum noch nicht »durch sich selbst definiert«. Russell meinte wohl unter diesem Ausdruck, die Existenz einer solchen Klasse setze sich selbst in der Klasse als Element voraus. Indessen setzt die Existenz einer Klasse nur die Existenz irgendwelcher Elemente von gewisser Eigenschaft voraus, aber nicht die Existenz aller dieser Elemente. Denn eine Klasse oder ein Inbegriff ist durchaus nicht aus den Elementen zusammengesetzt, die das Kriterium erfüllen, was die Klasse definiert, oder die zum Umfange eines Begriffes gehören. Dann wäre es freilich unmöglich, daß sie als Element, nämlich neben den anderen Elementen unter sich selbst enthalten sind. Daß ein Inbegriff sich selbst als Element enthalten kann, verdankt er lediglich dem Umstand, daß er seine Eigenständigkeit als Element erst dann erlangt, wenn er logisch unwirksam geworden ist. In seiner logischen Funktion ist er imaginär den Elementen gegenüber.

Die Kehrseite dessen, daß Inbegriffe Sinngebilde sind, ist aber das, daß z. B. ein durch den Begriff von a definierter Inbegriff gleichsam automatisch alle a umspannt. Es ist das nicht nur eine nachprüfbare, obzwar gewisse Tatsache, sondern etwas, was bei der Nachprüfung von Tatsachen als selbst jeglicher Nachprüfung a limine enthoben vorausgesetzt wird. Und darauf war auch die Paradoxie gerade aufgebaut, daß gewisse »Mengen« zufolge ihres τί oder zufolge einer Eigenschaft ohne weiteres unter sich selbst als Element enthalten sind. Dann war es aber unbedacht, diese Paradoxie von der Menge der Mengen, die sich nicht selbst enthalten, an die mathematischen Mengen anzuknüpfen. Denn – und das gibt den Ansatz zur Lösung der noch ausstehenden Paradoxien der Mengenlehre – eine mathematische Menge ist durchaus keine bloß logische Bildung, zu deren Definition es lediglich der Angabe einer Eigenschaft bedürfte. Daß eine solche Menge Teile, Abschnitte usw. enthalten kann, daß die Eigenschaften einer Menge im Sinne des Mathematikers abhängig sind von der Stellung von deren Elementen, zeigt, daß diese Mengen nicht nur intentional auf gewisse Dinge als ihre Elemente bezogen sind, sondern daß sie aus ihren Elementen recht eigentlich bestehen. Darum kann eine

Menge freilich nicht als Element in ihren eigenen Aufbau mit einbezogen sein. Wir präsumieren damit nichts über die »Wirklichkeit« von Mengen. Das ist eine nachgeordnete Frage, und es war verkehrt, sie der ontologischen Frage nach dem, was eine Menge »eigentlich« ist, zu unterschieben.

Aus dem definitorisch angesetzten prädikativen Bestand von Elementen ist wohl die Reichweite von deren Klasse oder Inbegriff ohne weiteres abzulesen, aber die Mächtigkeit einer Menge hat überhaupt kein unmittelbares Verhältnis zu dem prädikativen Bestand der Elemente dieser Menge. »Alle Dinge« — das ist fürs erste ein Inbegriff, und wir wollen annehmen, sie bildeten auch eine Menge L — etwas freilich Unmögliches, da L selbst ein Ding ist und keine Menge zu sich selbst als Element gehören kann. Nach einem Satze der Mengenlehre wäre die Menge der Teilmengen von L von größerer Mächtigkeit als L. Aber darum würde es noch nichts Umfassenderes geben als »alle Dinge«, wie das eine angebliche Antinomie behauptet. Denn die Teilmengen von L wären auch »Dinge« und mitumspannt von deren Inbegriff. Nur von der Menge L wären sie als Element ausgeschlossen, für deren Bildung ein begriffliches τί aber gar nicht hätte konstitutiv sein können.

Burali-Forti formulierte diese Paradoxie: Alle Ordnungszahlen können nacheinander geordnet werden; da es in jeder Teilmenge von Ordnungszahlen ein erstes Glied gibt, ist die Bedingung der Wohlordnung erfüllt. Eine wohlgeordnete Menge definiert aber nach einem Satze der Mengenlehre eine nicht in ihr enthaltene Ordnungszahl, die andererseits in »allen« Ordnungszahlen mit enthalten ist. — Freilich ist es richtig, daß alle Ordnungszahlen der Größe nach geordnet werden können. Es gibt keine Ordnungszahl, die nicht Glied einer wohlgeordneten Menge wäre. Aber darum gibt es noch keine wohlgeordnete Menge aller Ordnungszahlen. Das, was immer von neuem in die Paradoxie hineintreibt, ist die formal jeder Prüfung enthobene und sachlich bewährte Richtigkeit eines allgemeinen Satzes. Und das, was den Ausweg sperrt aus der Paradoxie, ist die stillschweigende Transformation dieses allgemeinen Satzes über Ordnungszahlen in einen kategorischen Satz über eine »Menge« dessen, was in den Triftigkeitsbereich des allgemeinen Satzes fällt.

Die Paradoxie ist damit erledigt, deren Pointe es war, daß gerade dadurch, daß man nicht umhin konnte, allen Ordnungszahlen eine gewisse Eigenschaft zuzusprechen, etwas definiert zu sein schien, was nicht »alle Ordnungszahlen« ist. Es bleibt lediglich der *Widerspruch* zurück, mit dem die Menge aller Ordnungszahlen behaftet ist. Diesen Widerspruch werden wir aber nicht für die Nichtexistenz der Menge aller Ordnungszahlen verantwortlich machen können. Man suchte seine Erklärung darin, daß bei der Menge aller Ordnungszahlen ein Ding in seiner Definition bereits vorausgesetzt worden sei. Indessen kommt es gerade insofern zu dem Schein einer *Antinomie*. Denn daß es der Ordnungszahlen in infinitum gibt, daß alle Ordnungszahlen in einer obschon unendlich großen Anzahl irgendwie *repräsentiert* sind, scheint gerade anzuzeigen, daß sie zueinander komposibel sind. Das macht den Widerspruch in der Menge aller Ordnungszahlen allererst peinlich, daß in der erwähnten Tatsache etwas *anderes* fixiert ist als die doch lediglich imaginäre Existenz eines logischen Sinngebildes. Die als eine gleichsam »abgespaltene« Existenz im Falle der Klasse das Vorkommen irgendwelcher Elemente nur zur Voraussetzung hat, deren Träger aber die *Häufigkeit* seiner Glieder in keiner Weise als eine Eigenschaft zugesprochen werden kann. Denn sehen wir ab von Attributen derart wie die Imaginarität, die einer Klasse als eigenständigen Dinge zukommt, so hat sie Eigenschaften nur hinsichtlich ihrer logischen Funktion. Daß sie z. B. zufolge der sie definierenden dinglichen Eigenschaft *umfassender* ist als eine andere Klasse.

Auch die Antinomie der Menge aller Mengen verfängt allererst von daher, daß die Mengen nicht nur – jede für sich gleichsam – in den intentionalen Bereich eines alle umspannenden logischen Sinngebildes fallen, sondern daß sie »in unendlich großer Zahl vorhanden« sind. Daß diese Menge nicht als Element von sich selbst auftreten kann, erscheint dann gerade als die Verlegenheit und durchaus nicht mehr als eine schlicht hinzunehmende Erklärung ihrer Nichtexistenz. Denn mit einigem Grunde meint man, daß mathematische »Mengen« Anzahlen, nur eben unendlich große sind.

Indessen »besteht« eine Anzahl lediglich als *Angabe* und ist kein existenter Bestand. Sie enthält gar nicht – wie das bei dem neuen Einwande gerade vorausgesetzt wurde – die Dinge als Elemente, deren Anzahl sie ist. Eine Anzahl kann zu einer anderen Anzahl nur »größer« oder »kleiner« oder gleich sein. Nennen wir eine *Anzahl* »Teil« einer anderen, so ist das nur eine Übertragung dessen, daß sie »kleiner« ist. Darum sind aber Anzahlen in infinitum, die dadurch, daß sie nicht vermehrt werden können, als *in sich selbst fixierte Anzahlen* ausgewiesen sind, untereinander unvergleichbar. Das in infinitum der Elemente einer Menge kann nur die Voraussetzung sein für die Äquivalenz dieser konsistenten Mannigfaltigkeit mit einem Teile von sich selbst. Versucht man, diese Anzahl in infinitum auch zum Träger der genannten Eigenschaft zu machen, so wird sogleich der Ansatz des Begreifens aufgegeben. Das gibt Russell[1]) auch zu durch die Erklärung, die Mengenlehre hätte sich in dem Satz von der Gleichmächtigkeit einer unendlichen Menge mit einem Teile von sich selbst für die Richtigkeit einer »Paradoxie« entschieden. Russell erinnert an die Autobiographie des Tristram Shandy, der 365 Tage brauchte, um einen Tag seines Lebens zu beschreiben. Nach Russell war das Ziel des Tristram Shandy erreichbar, hätte er in infinitum fortgelebt. Wir können nur finden, daß sich Tristram Shandy trotz seines Fortlebens in infinitum immer weiter von seinem Ziele entfernen würde. Denn dadurch, daß wir in infinitum immer wieder Tage ansetzten, definierten wir noch keineswegs zwei Mannigfaltigkeiten, die eine als Teil der anderen, deren spezifische Natur in Eigenschaften zu entdecken wäre. Damit, daß Mengen etwas »Natürliches« sind, ist aber gar nichts ausgemacht über so etwas wie deren Existenz. Es ist lediglich abgesehen auf den ontologischen Unterschied der Mengen zu den Anzahlen in infinitum, in deren Sinn es z. B. einfach beschlossen liegt, daß das unvermehrbar ist, in dessen Bestehen eine tatsächliche Verbreitung von Dingen nur bestimmend getroffen war.

1) Principles of mathematics I, S. 358.