QUEEN'S PAPERS

IN PURE AND APPLIED

MATHEMATICS

No. 65

Contributions à la Théorie du Calcul des Variations

par
E. HUSSERL

Édition critique par
J. VAUTHIER

CONTRIBUTIONS A LA THEORIE

DU CALCUL

DES VARIATIONS

E. HUSSERL

(thèse mathématique)

Edition critique par

J. VAUTHIER

CONTRIBUTIONS A LA THEORIE

DU CALCUL DES VARIATIONS

by

E. HUSSERL

Edited by

J. VAUTHIER

Queen's Papers in Pure And

Applied Mathematics - No. 65

Queen's University

Kingston, Ontario, Canada

1983

INTRODUCTION

Plan:

Si Husserl est un philosophe mondialement connu comme fondateur de la "Phénomènologie", il est moins sûr que l'on sache qu'il fut d'abord un mathématicien. Né en 1859, en Autriche-Hongue, de parents juifs, il suit, apres des études secondaires banales, les cours de l'Université de Leipzig puis de Berlin (1876 a 1878). Dans cette dernière ville, il a comme principaux Professeurs Kronecker, père de l'algèbre moderne, et Weierstrass, dernier géant de la mathématique du 19e siècle. En mars 1881, il retourne à Vienne pour finir la thèse sous la direction de Konigsberger et la soutient le 29 novembre 1882. En 1883, il retourne à Berlin comme assistant de Weierstrass. Son attirance pour la philosophie le ramène à Vienne pour suivre les cours de Brentano (1884). C'est à cette époque qu'il se convertit au Christianisme. Il obtient à Halle-Vittenberg son Habilitationschrift sur le concept de nombre "Uber den Begrift der Zahlen Psychologische Analysen".

Nomme professeur à Halle puis à Göttingen, il devient titulaire à Fribourg en Brisgau où il écrira l'essentiel de son oeuvre philosophique. Il meurt en 1938 et son successeur à Fribourg n'est autre que Martin Heidegger dont l'influence sur la philosophie contemporaine est considérable.

Le bouillonnement d'idées autour de Kronecker, Weierstrass et Cantor, les remises en question radicales dues à la découverte d'outils mathématiques puissants ont sans doute contribué à l'interrogation d'Husserl. Le pas entre la mathématique et la philosophie est aisement franchi pour qui s'interroge sur les fondements.

J'ai tenté, à côté de l'édition du texte de la thèse mathématique d'Husserl, de montrer combien le calcul des variations avait été fécond en mathématique depuis les origines. Notre philosophe a donc fait un travail

dans le domaine central des découvertes mathématiques de la fin du 19e siecle et du début du 20e siecle. Il serait intéressant d'étudier l'influence que cette thèse a eue sur la pensée philosophique de son auteur.

C'est grâce à Marcel Francois, Professeur à l'Université de Nanterre et responsable aux côtés de Paul Ricoeur du Séminaire de Phénomènologie de Paris que la thèse de Husserl a pu être trouvée à Louvain et ainsi mise à la disposition du public. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Je remercie le Doyen Dieudonné et mes collègues Francois Aribaud et Pierre Dugac pour les suggestions et aides qu'ils m'ont apportées lors de la rédaction de ce travail sur le calcul des variations.

Mademoiselle Devouard s'est acquittée de la lourde tâche de traduction du manuscrit. Qu'elle soit remerciée pour ce travail ingrat qu'elle accepta de faire gracieusement lorsqu'elle était jeune normalienne agrégée.

Enfin, c'est grâce à mes collègues canadiens, Peter Greiner et Paulo Ribenboim que ce texte est édité. Sans leur amitié et leur aide le manuscrit serait encore dans un placard à attendre une publication.

J. VAUTHIER

Présentation de la thèse d'E. Husserl

Husserl et Weierstrass.

E. Husserl avait donc fini ses études secondaires et réussi les examens correspondants le 30 juin 1876 à Olomuc en Bohème. Il est ensuite étudiant an an et demi à Leipzig (1877-1878) puis arrive à Berlin dès l'été 1878. Il suit alors les cours de Weierstrass comme le prouvent les cours sténographique pris de sa main (Archives de Louvain):

- Einleitung in die Theorie der elliptischen Funktionen Vorlesungen von Carl Weierstrass zu Berlin (1878-79).

- Vorlesungen uber die Variationsrechnung von Carl Weierstrass. Berlin im Sommersemester 1879.

- Professor Carl Weierstrass: Theorie der analytischen Funktionen (1880-81).

Ces cours furent mis à la disposition des éditeurs des Opera omnia de Weierstrass par Husserl lui-même et il apparait comme l'un des auditeurs officiels des cours du grand mathématicien.

Dès l'été 81, il part pour Vienne où il reste jusqu'en mai 1882, assistant au séminaire de Leo Koenigsberger, un autre élève de Weierstrass. Il revient à Vienne à l'automne pour soutenir sa thèse - n'oublions pas qu'il était citoyen de l'Autriche-Hongrie par sa naissance. Le 2 octobre 1882, le doyen de l'Université, Budiger, nomme Koenigsberger et Weyr comme premier et second rapporteur. Il soutient sa thèse le 29 novembre 1882 et Weierstrass le prend comme assistant à Berlin durant le semestre d'été 83. Mais il retourne à Vienne auprès de Brentano pour poursuivre ses études de philosophie. Ceci débouche sur son Habilitationschrift avec une étude sur le concept de nombre (1886-87). Il passe brillamment ("ruhmlich") son Rigorosum dont l'examineur en mathématique n'était autre que Georg Cantor, un autre disciple de Weierstrass!

On peut donc raisonnablement penser que c'est pour des questions géographiques qu'Husserl alla passer sa these à Vienne. La valeur de celle-ci fut reconnue par Weierstrass qui l'appelait comme assistant sitôt la soutenance acquise. Mais la philosophie fut plus forte que la mathématique: la chance de la phénomènologie - comme on l'a écrit - est certainement qu'Husserl n'ait pas d'abord été philsophe mais mathématicien.

Résumé de la thèse mathématique.

L'impression la plus forte qui se dégage de la lecture de la thèse est la maturation du problème par Husserl qui donne ses démonstrations personnelles du résultats de la théorie. Il a accompli là un énorme travail de mise au point de l'acquis mathematique sur le sujet. Nous renvoyons à la présentation historique pour bien comprendre la développement qui suit.

Les numéros sont ceux des pages de la thèse.

1. Remarques sur le probleme le plus simple dans la theorie generale du calcul des variations.

1 à 10: transformation de la deuxième variation suivant la méthode de Lagrange (Théorie des fonctions analytiques p.205 Prairial An V).

Enoncé d'un premier théorème (Lagrange):

"Sous réserve de solution bornée pour l'équation $M - N^2/4P = 0$, la condition $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} > 0$ est nécessaire et suffisante."

11 à 12: Exemple d'annulation de la deuxième variation. En fait, il est impossible, si la fonction $N/2P$ est continue sur $[x_0,x_1]$ de choisir ω solution de $z' + (N/2P)z = 0$ avec $\omega(x_0)$ ou $\omega(x_1)$ nul, sauf si ω est identiquement nulle.

12 à 14: Il retrouve la transformation de Jacobi et l'équation correspondante avec toutefois un cercle vicieux car $N/2P$ dépend de ν par l'expression 3, π de ν par l'equation 11 et on choisit ν fonction de π par 12.

15 à 18: Le théorème fondamental de Jacobi sur les solutions de son équation est obtenu par une méthode de petites perturbations. Husserl donne une preuve plus simple que celles de Clebsch et Mayer. (On sait maintenant qu'une simple derivation donne la résultat).

19 à 21: Mise en évidence des points conjugués et fin des résultats de Jacobi: au delà d'un point conjugué il n'y a plus d'extrema.

II. Sur la déduction des critères à partir de la transformation de la deuxième variation par Clebsch et Jacobi.

22 à 25: Utilisation des multiplicateurs de Lagrange pour l'expression de la deuxième variation dans le cas général.

26 à 28: La transformation linéaire de Clebsch (Journal de Crelle n° 55, p.335-355, 1858) et la réduction de l'étude de signe de la seconde variation à celle d'une forme quadratique sur un sous-espace.

28 à 42: Etude de la relation entre les zéros du déterminant de Clebsch et les points conjugués. Il a ici une approche distincte et plus générale que celle de Mayer (Journal de Crelle n° 69, p.250-1868).

III. De la limite pour l'existence d'un extremum.

45 à 66: Husserl étudie le cas d'un seul point conjugue x' à x_0 sur le segment $[x_0,x_1]$ par la méthode de Weierstrass. Ce n'est pas celle qui est développée dans Erdmann (Zeitschrift für Mathematik und Physik, Vol. 23, p.367, 1878).

C'est incontestablement la meilleure partie de la thèse, en particulier l'utilisation du wronskien pour l'annulation de w_h.

Les propriétés de régularités des fonctions ne sont pas encore le problème de l'école de Weierstrass: la fonction f est sans doute analytique réelle (cf. p.16 le développement en serie). La seule allusion à une quelconque régularité se trouve au n° 53: "f est differentiable car elle ne cesse de se transformer". Le continu et la continuité allaient être mis à jour par Cantor et par l'exemple de fonction continue sans dérivée par Weierstrass. La problématique aristotélicienne du continu ressurgissait; n'allait elle pas de facon concomittante apparaitre dans les oeuvres du philosophe Husserl?

CONTRIBUTIONS A LA THEORIE
DU
CALCUL DES VARIATIONS

par

Edmund Husserl

(Thèse de Doctorat d'Université 1882)

((cf. l'index des thèses présentées et acceptées depuis 1872 à la Faculté de Philosophie de l'Université de Vienne.

Edité par les services du Doyen de la Faculté de Philosophie de l'Université de Vienne, Tome III, Mathématiques, N° 14, Vienne 1936, p.2:

"Edmund Husserl: Contributions à la théorie du calcul des variations. H1882 PN 268"

(Explication des abréviations: H: manuscrit

1882: date à laquelle la thèse fut acceptée

PN...: Procès-verbal des soutenances de thèses N° ...

A coté du titre se trouvent le sigle et deux cachets de l'Université de Vienne (l'un de service du Doyen, l'autre de la bibliotheque universitaire de Vienne). Au-dessus, en haut à droite, on trouve ceci, écrit de la main du doyen de l'époque, Monsieur Budinger:

"A Monsieur le Professeur Weyr, comme co-rapporteur (("co-rapporteur" = correction de "rapporteur"))

A Monsieur le Conseiller aulique, Pr Konigsberger comme rapporteur (("rapporteur" = correction ce "co-rapporteur"))

pour leur obligeante appreciation

le doyen Budinger))

Vienne, le 2 x 82

1. Remarques sur le problème le plus simple dans la théorie générale du calcul des variations

Dans le XVII^{eme} volume du Journal de Crelle(1) se trouve reproduite une lettre de Jacobi à Schumacher(2), dont le contenu peut à juste titre être considéré comme l'un des travaux les plus singuliers et les plus géniaux du grand maitre. Un problème reste jusqu'alors sans solution, devant lequel, même dans sa forme la plus particulière, les efforts des plus grands mathématiciens, d'un Legendre et d'un Lagrange, avaient échoué, parait soudainement parfaitement résolu. En relation avec l'exercice suivant:

"Trouver parmi toutes les fonctions y , quelles qu'elles soient, d'une variable indépendante x , celle qui rend maximale ou minimale l'integrale suivante:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y',\ldots,y^{(n)})dx \text{ "}$$

la théorie de Euler et Lagrange sur le calcul des variations enseignait que seule / la fonction y liée à x par une equation differentielle du deuxième ordre facile à poser, peut apporter une solution. C'est à ce résultat que conduisit l'observation de la "première variation" de l'intégrale proposée.

---

(1) Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, édité par Crelle.

(2) On y trouve en fait un "Extrait d'un Ecrit" de Jacobi, s'adressant non pas à Schumacher, mais au Professeur Enke. Journal de Crelle 17, p.68, '82. C'est manifestement celui dont il s'agit ici.

Mais il restait alors à répondre à la question extrêmement difficile de savoir si pour la fonction ainsi définie, et déterminée de façon univoque à l'aide de deux conditions limitatives prescrites dans chacun des deux cas, l'intégrale devient un maximum ou un minimum ou aucun des deux. Cela conduisit à rechercher le signe de la "deuxième variation" de l'intégrale considérée. C'est à Legendre que l'on doit l'idée fructueuse de la transformation de la deuxième variation en une forme qui permette de reconnaitre immediatement son signe. Il traita le problème le plus simple, c'est-à-dire celui qui possède cette particularité que la fonction f contient sous le signe de l'intégrale simplement la première derivée de la fonction inconnue y , et, ayant reconnu pour ce probleme la possibilité d'une transformation, il en déduisit prématurément un critère insuffisant. [Lagrange travailla plus en profondeur en exposant que la transformation ne pouvait demeurer valable qu'aussi longtemps qu'aucun des termes de l'expression transformée ne devenait infini.] Or, pour en décider, il serait nécessaire, d'effectuer véritablement la transformation. Mais bien que Lagrange emprunte la bonne voie, il ne parvient pas cependant à atteindre le but vers lequel il tendait. La réalisation de la transformation pour le problème le plus simple requiert l'intégration d'une certaine équation différentielle non linéaire du premier ordre. Tous les efforts de Lagrange pour résoudre celle-ci ont échoué.

Les choses sont encore plus compliquées, et de loin, dans le problème plus général dans lequel la transformation rend nécessaire la résolution de tout un système d'équations différentielles. Les résultats de Jacobi évoqués ci-dessus (ci-dessus abrégé dans le manuscrit) et contenant les critères les plus complets - des critères aussi nécessaires que suffisants - pour le problème général, sont d'autant plus admirables. Or, Jacobi garda par devers lui les recherches approfondies qui ont conduit aux résultats significatifs, et c'est ainsi que les mathématiciens qui ont pris sa succession ont dû surmonter la tâche difficile qui consista à effectuer véritablement la transformation, à partir des rares indications laissées par le grand maitre, et à vérifier à l'aide de celles-ci les résultats obtenus. C'est seulement à travers les travaux essentiels de Hesse, Clebsch et A. Mayer que la theorie de la deuxième variation, tant en ce qui concerne le problème traité par Jacobi que les problèmes les plus généraux du calcul des variations, apparait comme parfaitement établie.

L'on peut considéré comme le noyau / véritable des découvertes de Jacobi celle de ce fait remarquable que les équations différentielles de la transformation sont intégrées automatiquement lorsque l'équation différentielle du problème, c'est-à-dire celle dont l'intégrale à elle seule permet de résoudre le problème posé, est intégrée. C'est là en effet la preuve que la transformation pouvait véritablement être exécutée pour le problème le plus général en suivant la voie déjà exactement tracée par Lagrange.

Etant donné l'importance de ces découvertes, dont l'apparition soudaine frise presque le merveilleux, il ne serait peut-être pas $^{\text{in}}$intéressant d'essayer de reconstituer le cheminement originel de la pensée de Jacobi. Sans aucun doute Jacobi s'attacha au probleme le plus simple, jusqu'alors le seul à avoir été traité de facon exhaustive, et le conduisit vers sa résolution totale. La possibilité d'étendre les principes acquis ici à un cas plus général était évidente, quel que soit le degré de compléxité des calculs correspondants - même si ceux-ci n'exigeaient plus d'opérations transcendantes.

Or, il existe une voie extrêmement facile et naturelle, qui conduit sans encombre du point precis où Lagrange dut s'arrêter jusqu'aux résultats de Jacobi. L'exposer est le but des remarques suivantes.

Il nous faut tout d'abord exposer ici brievement la méthode de Lagrange (Théorie des fonctions analytiques, Chapitre XII).

Si on pose l'intégrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')dx$$

l'expression pour la deuxième variation est:

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} 2\,\Omega_2\, dx$$

ou la notation:

$$1)\ \Omega_2 = \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z\frac{dz}{dt}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$$

et $z = \delta y$ a été introduite.

Nous décomposons maintenant Ω_2 en deux parties

$$\Omega_2 = (I) + (II) \;,$$

dont la première doit conserver un signe constant, et dont la deuxième doit représenter une dérivée exacte. Si M,N,P désignent pour l'instant des fonctions inconnues, nous écrivons:

$$2)\qquad \Omega_2 = z^2 M + z\frac{dz}{dx}N + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 P \;\ldots \qquad (I)$$

$$\left.\begin{aligned} &+ z^2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{dy^2} - M\right) + z\frac{dz}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - N\right) \\ &+ \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} - P\right) \end{aligned}\right\} \qquad (II)$$

Nous identifions la partie (II) avec $\frac{d}{dx}(\mu + z^2\nu) = \frac{d\mu}{dx} + 2z\frac{dz}{dx}\nu + z^2\frac{d\nu}{dx}$ où μ,ν représentent des fonctions inconnues, et il s'ensuit de par la comparaison des coefficients des grandeurs z :

$$\frac{d\mu}{dx} = 0 \;, \text{ c'est-à-dire } \mu = \text{const.}$$

$$\frac{d\nu}{dx} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - M$$

$$2\nu = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - N$$

$$0 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} - P$$

donc:

$$M = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d\nu}{dx}$$

3) $$N = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - 2\nu$$

$$P = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$$

La substitution de ces expressions en 2) donne:

$$\Omega_2 = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d\nu}{dx}\right)z^2 + z\frac{dz}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - 2\nu\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$$

$$+ \frac{d}{dx}(\mu + \nu z^2)$$

4) $$\equiv \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{dz}{dx} + z\frac{N}{2P}\right)^2 + z^2\left(M - \frac{N^2}{4P}\right) + \frac{d}{dx}(\mu + z^2\nu)$$

où, pour des raisons de clarté, les notations M, N, P pour les expressions ci-dessus 3) sont conservées. Si la partie (I) doit maintenant conserver un signe constant, par exemple continuellement positif pour des quelconques variations z, les conditions nécessaires et suffisantes:

5) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} > 0 \quad \langle \text{et} \rangle \quad M - \frac{N}{4P} \geq 0$$

doivent être remplies pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle. La première des conditions est celle deja donnée par Legendre. Le fait que celles-ci soient également nécessaires et suffisantes pour le cas où $\delta^2 I$ possède continuellement un signe fixe, serait facile à montrer.

Seule la deuxième condition, qui a la teneur suivante lorsqu'on l'écrit en entier:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d\nu}{dx} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - 2\nu\right)^2 \frac{1}{\partial^2 f/\partial y'^2} \geq 0$$

contient la fonction ν.

(dans le manuscrit, manifestement erroné $= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\frac{d\nu}{dx} \ldots \geq 0$)

Si nous définissons à présent, ce qui est permis, cette fonction par l'équation différentielle $M - N^2/4P = 0$, ou

6) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d\nu}{dx}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - 2\nu\right)^2 = 0\,, \qquad ((1))$$

alors l'expression de la deuxième variation

7) $$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{dz}{dx} + z\frac{N}{2P}\right)^2 + 2z^2\left(M - \frac{N^2}{4P}\right)\right\}dx + [z^2\nu]_{x_0}^{x_1} \qquad 2)$$

se réduit à l'expression plus simple:

8) $$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{dz}{dx} + z\frac{N}{2P}\right)^2 dx + [z^2\nu]_{x_0}^{x_1}$$

et nous en déduisons le théorème:

((1) dans 6) de nouveau cette erreur: $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\frac{\partial \nu}{\partial x}\right) \ldots = 0$

2) Rigoureusement parlant, 7) doit être $\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} \{\ldots\} + [\mu + z^2\nu]_{x_0}^{x_1}$, ce qui en fait, puisque $\mu = \text{const}$, est équivalent à 7) dans le ms)).

Tant qu'il est possible d'intégrer l'équation différentielle 6) de telle facon que son intégrale ne devienne pas infinie entre les bornes x_0 et x_1, la condition $\partial^2 f/\partial y'^2 > 0$ pour l'existence d'un minimum est nécessaire et suffisante.

Car pour les variations z prises en considération, la valeur-limite disparait de facon identique et aucune partie de l'expression transformée ne devient infinie.

Afin de tirer parti à présent du théorème trouvé, il devient nécessaire d'intégrer l'équation différentielle 6). C'est justement là que la recherche de Lagrange s'arrête. L'on peut poursuivre la theorie du problème de la manière suivante:

L'expression 8) ne doit, non seulement pas devenir infinie, mais encore elle ne doit pas disparaître; car sinon l'observation de la deuxième variation ne suffirait pas pour en tirer des critères, et il est facile de se rendre compte que dans la plupart des cas alors ni un maximum, ni un minimum ne pourraient se faire jour. Or on peut indiquer immédiatement une variation spéciale pour laquelle ce cas, qu'il nous faut exclure, se produit. Posons par exemple pour z une intégrale particulière quelconque $z = \omega$ de l'équation différentielle

$$\frac{dz}{dx} + z\,\frac{N}{2P} = 0$$

ou, ce qui est la même chose

$$\text{9)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\frac{dz}{dx} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - 2\nu\right) z = 0$$

alors en trouve:

$$\delta^2 I = [\omega^2 \nu]_{x_0}^{x_1}$$

et cette valeur-limite est zéro lorsque l'équation différentielle peut être intégrée de telle facon que ω disparaisse pour $x = x_0$ et $x = x_1$. Il faut tenir compte de ce que ν est une intégrale de l'équation différentielle 6), et de 9) s'ensuit à present:

$$\text{10)} \qquad 2\nu = \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dx}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}$$

Mais si nous considerons ν comme une grandeur quelconque, en nous reportant à l'identité originelle 7):

$$\delta^2 \Omega = \int_{x_0}^{x_1} \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{dz}{dx} + z\,\frac{N}{2P}\right)^2 + 2z^2\left(M - \frac{N^2}{4P}\right)\right\} dx + [z^2\nu]_{x_0}^{x_1}$$

il s'ensuit que la substitution

$$z = \pi,$$

ou π represénte n'importe quelle intégrale particulière de l'equation differentielle

$$\text{11)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{dz}{dx} + z\,\frac{N}{2P}\right)^2 + 2z^2\left(M - \frac{N^2}{4P}\right) = 0$$

réduit $\delta^2 I$ à la valeur-limite

$$\delta^2 I = [\pi^2 \nu]_{x_0}^{x_1}$$

qui devient de nouveau zéro dès que π peut devenir déterminé de telle facon qu'il s'annule aux bornes.

A présent nous voyons de facon immédiate que, si nous choisissons la fonction ν, qui jusqu'à present était une grandeur quelconque, de telle façon que, par analogie avec la formule 10) nous posions:

12) $$2\nu = \frac{1}{\pi}\frac{d\pi}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}$$

le premier membre de 11) disparaîtrait de facon identique et nous devrions avoir en conséquence:

$$M - \frac{N^2}{4P} = 0$$

ou, ce qui est la même chose:

6) $$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d\nu}{dx}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - 2\nu\right)^2$$

Soit, en d'autres termes:

Si $z = \pi$ est n'importe quelle intégrale particulière de l'équation différentielle 11) - pour laquelle $\delta^2 I$ se réduit en conséquence à la valeur-limite - alors nous est donnée aussi avec elle et de facon immédiate par la formule 12) une integrale de l'équation différentielle de la transformation. Inserrons l'expression 12) dans 11), ou, ce qui est la même chose, dans 6) et nous obtenons:

13) $$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \cdot \frac{d^2\pi}{dx^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right)\frac{d\pi}{dx} - \pi\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\right)$$

Si l'intégrale générale de cette équation différentielle linéaire du deuxième ordre ((ms: 2^e 0) est:

$$\pi = C_1\psi_1(x) + C_2\psi_2(x)$$

où C_1 , C_2 représentent des constantes arbitraires, alors l'expression 12) nous livre l'intégrale générale de l'équation différentielle de la transformation 6), qui est du premier ordre; manifestement, le rapport des constantes C_1 et C_2 tient la place d'une constante arbitraire dans l'integrale 12).

L'intégration de l'équation différentielle 6) est ainsi ramenée à celle de l'équation différentielle linéaire 13).

Nous remarquions plus haut que $\delta^2 I$ se réduit à une valeur-limite, éventuellement à zéro dès que nous introduisons en particulier π pour la fonction arbitraire z . Si nous nous posons à present, indépendamment de la transformation, la question de savoir quand $\delta^2 I$ possède cette propriété, nous pouvons procéder de la manière suivante:

Soit

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} 2\Omega_2 \, dx$$

et puisque Ω_2 est une fonction homogène de deuxième ordre ((ms: 2^e 0)), il s'ensuit, lorsqu'on effectue une modification connue et usuelle pour la première variation:

14) $$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} z\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega_2}{\partial z'}\right)dx + \left[z\frac{\partial\Omega_2}{\partial z'}\right]_{x_0}^{x_1}$$

et cette expression se réduit à la valeur-limite dès que pour z on suppose une intégrale de l'équation

13a) $$\frac{\partial\Omega_2}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega_2}{\partial z'} = 0$$

Or, un calcul simple nous convainc de l'<u>identité</u> de cette équation différentielle et de la 13) linéaire.

La forme spécifique 13a), dans laquelle on peut ainsi poser notre équation différentielle 13), nous conduit à découvrir une relation importante entre celle-ci, et l'équation différentielle du problème

15) $$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad .$$

En fait, si nous posons

$$\Omega_1 = \delta f = z\frac{\partial f}{\partial y} + z'\frac{\partial f}{\partial y},$$

nous pouvons aussi écrire cette dernière sous la forme

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega_1}{\partial z'} = 0$$

et si nous considérons que

$$\Omega_2 = \delta^2 f = \delta\Omega_1$$

nous nous rendons compte aisément que nous avons

$$\frac{\partial\Omega_2}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega_2}{\partial z'} = \delta\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega_1}{\partial z'}\right)$$

$$= \delta\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

Si nous notons donc

$$F(y,y') \equiv \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}$$

alors $\frac{\partial\Omega_2}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega_2}{\partial z'}$ n'est rien d'autre que la totalité des termes du premier ordre dans le développement de la fonction $F(y + z, y' + z')$ par rapport à z, z' .

Soit maintenant

$$y = \psi(x,c_1,c_2)$$

l'intégrale de l'équation différentielle du problème connue de nous, alors on peut donner de facon immédiate une fonction z qui fait que nous avons

$$F(y,y') = F(y + z,\ y' + z') = 0\ ,$$

et donc aussi

16) $$\delta F + \delta^2 F + \ldots\ = 0$$

En fait, si nous donnons aux constantes c_1,c_2 des valeurs déterminées, mais de notre choix, l'expression

$$\bar{y} = \psi(x,\ c_1 + \varepsilon\gamma_1,\ c_2 + \varepsilon\gamma_2)$$

$$= y + \varepsilon(\frac{\partial\psi}{\partial c_1}\ \gamma_1 + \frac{\partial\psi}{\partial c_2}\ \gamma_2) + \ldots$$

dans laquelle ε représente une grandeur suffisamment petite, et γ_1,γ_2 des constantes tout-à-fait arbitraires, suffit également à l'équation différentielle du problème, et nous aurions ainsi, pour atteindre le but défini ci-dessus, qu'à poser:

$$z = \varepsilon(\frac{\partial\psi}{\partial c_1}\ \gamma_1 + \frac{\partial\psi}{\partial c_2}\ \gamma_2) + \ldots$$

Par la substitution de cette grandeur, 16) est donc vérifiée de façon identique, et si nous passons après une division par ε à la limite $\varepsilon = 0$, il s'ensuit que l'expression

17) $$z = \pi = \frac{\partial\psi}{\partial c_1}\ \gamma_1 + \frac{\partial\psi}{\partial c_2}\gamma_2$$

satisfait l'équation differentielle

$$\delta F = \delta(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\ \frac{\partial f}{\partial y'}) \equiv \frac{\partial\Omega_2}{\partial z} - \frac{d}{dx}\ \frac{\partial\Omega_2}{\partial z'}$$

et de fait cette expression représente l'intégrale générale, lorsque γ_1,γ_2 représentent des constantes arbitraires.

Ainsi se trouve démontré le théorème fondamental de Jacobi, selon lequel, avec l'intégration de l'équation différentielle du problème, celle de l'équation différentielle linéaire 13) est effectuée également.

Après les recherches précédentes il est maintenant également clair que la transformation est à effectuer sans l'accomplissement d'une opération transcendante.

[Note: Le théorème ci-dessus peut être démontré exactement de cette facon pour les problèmes les plus généraux du calcul des variations. La démonstration qu'en a donné Clebsch (Cr. J. LV)[1] et qui se trouve également reproduite dans le traité de A. Mayer (Cr 69)[2] est une simple vérification et

---

[1] Clebsch, "Sur la réduction de la deuxième variation à sa forme la plus simple", 1857, in Journal de Crelle, T55, p.254-27

[2] Mayer, "Sur les critères du maximum et du minimum des intégrales simples", 1868, in Journal de Crelle, T69, p.238-263.

ne fait pas apparaitre la source du théorème. C'est pourquoi la démonstration ci-dessus, par ailleurs fort évidente, se devrait de mériter la préférence.]

(Ce paragraphe, depuis "Note", jusqu'à "préférence" est inséré dans le manuscrit entre crochets).

Il s'agit à présent de tirer les conclusions des théorèmes découverts.

La validité de la transformation

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \left(\frac{dz}{dx} + z\frac{N}{2P}\right)^2 dx + [z^2 \nu]_{x_0}^{x_1}$$

ne nécessitait, comme nous l'avons vu, que la possibilité d'intégrer l'équation différentielle d'une transformation de telle facon que l'intégrale ν ne devienne pas infinie entre les bornes x_0 et x_1. Puisque son intégrale générale est

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\frac{d\pi}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}$$

ou π représente la fonction donnée

$$\pi = \frac{\partial \psi}{\partial c_1}\gamma_1 + \frac{\partial \psi}{\partial c_2}\gamma_2$$

contenant deux constantes arbitraires γ_1, γ_2, la condition en question peut être exprimée ainsi:

La transformation est valable aussi longtemps et seulement aussi longtemps qu'il est possible de particulariser l'expression

$$\pi = \frac{\partial \psi}{\partial c_1}\gamma_1 + \frac{\partial \psi}{\partial c_2}\gamma_2$$

de telle sorte que celle-ci ne puisse désormais pas devenir zéro entre les bornes x_0 et x_1.

Car si $x = x'$ est un zéro pour π, il est facile de prouver qu'alors nous avons

$$\left[\frac{d\pi}{dx}\right]_{x=x'} \gtrless 0$$

(cf. Hesse, Cr.J. LIV)[1], et ainsi ν deviendrait certainement à cet endroit ∞.

Si nous choisissons donc les constantes arbitraires γ_1, γ_2 de telle façon que π disparaisse pour $x = x_0$ ou pour une valeur située infiniment près de x_0, $x = x_0 - \zeta$, alors le zéro suivant de π, $x = x'$ donne la limite extrême jusqu'à laquelle x_1 peut s'étendre afin que la transformation conserve sa validité. Eu égard à l'étude génerale donnée plus loin, je puis me permettre de renoncer à une justification stricte et complète de ces conclusions.

Ce point limite extrême (et d'ores et dejà à exclure) est ainsi défini par la racine située près de x_0 de l'équation

$$\Lambda(x, x_0) \equiv \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\psi}{\partial c_1}\right)_{x_0} & \left(\frac{\partial\psi}{\partial c_2}\right)_{x} \\ \frac{\partial\psi}{\partial c_1} & \frac{\partial\psi}{\partial c_2} \end{vmatrix} = 0$$

Comparons ce résultat à une remarque précédente, et il en découle une autre conclusion de la plus haute importance.

---

[1] Hesse, "Sur les critères du maximum et du minimum des intégrales simples, 1857, Journal de Crelle, T.54, p.227-273.

Si en effet π se laisse particulariser de telle facon qu'il disparaisse pour deux valeurs de x, par exemple $x = x_0$ et $x = x'$, alors la deuxième variation de l'intégrale J étendue entre x_0 et x' a la valeur zéro dès que à z nous substituons cette valeur particulière π comme variation spéciale, ce qui est permis. Cette même propriété s'applique à la deuxième variation de l'intégrale proposée, lorsque nous avons $x_1 > x'$; car nous n'aurions qu'à poser $z = \pi$ dans l'intervalle $x_0 \ldots\ldots x'$, et $z = 0$ dans l'intervalle $x' \ldots\ldots x_1$. En général notre intégrale ne pourrait alors devenir ni un maximum ni un minimum.

La borne inférieure x_0 étant fixée, il existe ainsi une situation de limite extrême x' pour la borne supérieure x_1 au-delà de laquelle l'intégrale proposée ne peut en général présenter d'extrêmum. Manifestement, ce point limite est défini pareillement par la racine située tout près de x_0 de l'équation $\Delta(x,x_0) = 0$.

Si nous retenons en conséquence le point initial de l'intégration, le théorème suivant est valable:

La borne extrême au-delà de laquelle en général aucun extremum (ms. extrem.) ne peut avoir lieu, est identique à la limite extrême de validité de la transformation.

De cela découle de facon immédiate la totalité des critères de Jacobi.

A l'aide de la transformation de Lagrange on peut également traiter en conséquence le problème le plus général:

II - Sur la déduction des critères à partir de la transformation de la deuxième variation par Clebsch et Jacobi.

On peut notoirement considérer ce qui suit comme le problème le plus général du calcul des variations:
Il faut déterminer les variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soumises aux $m < n$ équations différentielles de premier ordre $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, ..., $\psi_m = 0$, comme des fonctions de x de telle facon que l'intégrale proposée:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, y_1', \ldots, y_n, y_n')dx$$

devienne maximum ou minimum.

Afin que cet exercice devienne possible et déterminé, il est nécessaire de fixer certaines conditions limites. Admettons que les valeurs limites des variables y_k soient données une fois pour toutes pour $x = x_0$ et $x = x_1$. Tous les autres cas peuvent se ramener à celui-ci.

La méthode de Lagrange relative aux multiplicateurs indéterminés permet de traiter ce probleme de la même facon que le problème le plus général du maximum et du minimum absolus. On pose

$$\Omega = f + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \psi_k$$

où λ_k représentent des multiplicateurs inconnus, et l'intégration du système simultané de $n + m$ équations différentielles du deuxième ordre:

1) $$\frac{\partial\Omega}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega}{\partial y'_k} = 0 \quad \langle k = 1,\dots,n\rangle$$

$$\psi_k = 0 \quad \langle k = 1,\dots,m\rangle$$

donne les fonctions cherchées $y_1 \dots\, y_n$ et les multiplicateurs $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ comme fonctions de x et de deux n constantes arbitraires, qui sont à déterminer en fonction des conditions limites prescrites.

Nous considérons cette partie de l'exercice comme étant déjà achevée et le résultat donné par

2) $$y_h = [y_h] = \psi_h(x,c_1,\dots,c_{2n})$$

$$\lambda_k = [\lambda_k] = \lambda_k(x,c_1,\dots,c_{2n})$$

$$h = 1,\dots,n \quad k = 1,2,\dots,m\ .$$

La substitution de ces expressions doit être signalée par leur insertion dans les crochets.

Afin de déterminer à présent si l'intégrale I, pour le système de fonctions ainsi découvert, devient un maximum ou un minimum ou peut-être ni l'un ni l'autre, il est nécessaire de rechercher le signe de la deuxième variation.

Si nous posons, sous la forme habituelle de notation

3) $$\delta^2\Omega = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\Omega}{\partial y_k \partial y_i} z_k z_i + 2\,\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_k \partial y'_i} z_k z'_i + \frac{\partial^2\Omega}{\partial y'_k \partial y'_i} z'_k z'_i \qquad \langle 1\rangle$$

nous avons

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} 2\partial^2\Omega\, dx$$

et pour toutes les fonctions arbitraires z_h, qui ne satisfont qu'aux m conditions

4) $$\delta\psi_k = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left[\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right] z_k + \left[\frac{\partial\psi_k}{\partial y'_k}\right] z'_k \right\} = 0 \qquad \langle 2\rangle$$

((ms: "h = 1,2...n")) $\langle k = 1,2,\dots,m\rangle$

cette intégrale doit toujours posséder un signe fixe.

Nous pouvons, et ceci est d'un intéret certain, introduire à la place de la fonction $\delta^2\Omega$, ceci:

5) $$\Omega_2 \equiv \delta^2\Omega + \Sigma_k\, \mu_k\, \delta\psi_k \quad \left(\text{plus exactement } = \sum_{k=1}^{m}\right)$$

---

[1] C'est-à-dire la fonction homogène de 2^e ordre de z_k et z'_k qui est engendrée par Ω lorsque l'on pose en général $y_k + \varepsilon z_h$ au lieu de y_h et lorsque dans le développement en les puissances de ε on prend le coefficient de $\frac{1}{2}\varepsilon^2$).

[2] Ces équations de conditions 4) pour z_h apparaissent lors du développement de l'intégrale en la puissance de ε, lorsqu'en général on pose $y_k + \varepsilon z_k$ à la place de y_h.

fonction qui n'est rien d'autre que le coefficient de $\frac{\varepsilon^2}{2}$ dans le développement de la fonction

$$\Omega\,(\ \ldots y_k + \varepsilon z_h \ \ldots\ \lambda_k + \varepsilon\mu_k \ \ldots) \qquad \langle 3\rangle$$

Nous avons à present

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} 2\Omega_2 \, dx \ .$$

La forme dans laquelle la deuxième variation nous est donnée de façon immédiate, ne permet pas cependant de reconnaitre son signe de façon immédiate. A la theorie incombe alors la tâche de transformer si possible $\delta^2 J$ de façon à ce que la nouvelle expression remplisse cette exigence. En généralisant les théorèmes fondamentaux de Jacobi, qui avaient rendu possible la transformation pour le problème dépendant d'une fonction inconnue y, Clebsch[4] parvint à accomplir cette transformation également pour le problème le plus général du calcul des variations. Il nous faut maintenant analyser brièvement le résultat de sa recherche.

Pour réaliser cette transformation ce sont les solutions d'un certain système d'équations différentielles qui sont utilisées, et dont le rapport avec le système d'équations différentielles du problème (1) est celui exprimé par le signe opérationnel δ ; donc le système

<3> C'est-à-dire de la fonction que l'on obtient de Ω, lorsque l'on remplace les variables y_h et λ_k par les grandeurs $y_h + \varepsilon z_h$ et $\lambda_k + \varepsilon\mu_k$.

[4] voir Clebsch op. cit.

$$\delta\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega}{\partial y'_k}\right) = 0 \ , \qquad \delta\psi_k = 0$$

ou bien:

$$6) \qquad \frac{\partial\Omega_2}{\partial u_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega_2}{\partial u'_k} = 0 \ , \qquad \frac{\partial\Omega_2}{\partial\gamma_k} = 0$$

où, pour les différencier, l'on a caractérisé ces systèmes de fonctions particulières z_h, μ_k par u_h, r_k. De ce rapport on conclut aisément ce théorème important que, avec l'intégration du premier système (1), celle du deuxième (6) se trouve également accomplie de facon immédiate. Les solutions générales du système (6) sont données par les formules:

$$7) \qquad \begin{aligned} u_h &= \sum_{\lambda=1}^{2n} \gamma_\lambda \frac{\partial\psi_h}{\partial c_\lambda} \qquad && h = 1,\ldots,n \\ r_k &= \sum_{\lambda=1}^{2n} \gamma_\lambda \frac{\partial\lambda_k}{\partial c_\lambda} \qquad && k = 1,\ldots,m \end{aligned}$$

dans lesquelles $\gamma_1,\ldots,\gamma_{2n}$ représentent les constantes arbitraires.

Pour chacun des 2 systèmes de solutions différents u_h, r_k et $\bar{u}_h$, $\bar{r}_k$ le rapport

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ \bar{u}_k \frac{\partial\Omega_2}{\partial\left(\frac{du_k}{dx}\right)} - u_k \frac{\partial\bar{\Omega}_2}{\partial\left(\frac{d\bar{u}_k}{dx}\right)} \right\} = \text{const.}$$

existe.

Dans le but de la transformation nous choisissons maintenant - et ceci est possible d'infiniment de façons - n pareils systèmes de solutions de 6):

$$8)\quad u_k^\sigma = \sum_{\lambda=1}^{2n} \frac{\partial\psi_k}{\partial c_\lambda} \gamma_\lambda^\sigma$$

$$\gamma_k^\sigma = \sum_{\lambda=1}^{2n} \frac{\partial\chi_k}{\partial c_\lambda} \gamma_\lambda^\sigma$$

qui possèdent la propriété de remplir les $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions indépendantes de x ("independantes de x" est une insertion):

$$9)\quad \sum_{k=1}^{n} u_k^\sigma \frac{\partial\Omega_2(u^\rho, r^\rho)}{\partial(\frac{du_k^\rho}{dx})} - u_k^\rho \frac{\partial\Omega_2(u^\sigma, r^\sigma)}{\partial(\frac{du_k^\sigma}{dx})} = 0$$

Si l'on introduit pour les $n + m$ grandeurs arbitraires z_h, μ_k, des combinaisons linéaires des systèmes de solutions 8) ainsi définis

$$10)\quad z_k = \sum_{\sigma=1}^{n} g_\sigma u_k^\sigma$$

$$\mu_k = \sum_{\sigma=1}^{n} g_\sigma r_k^\sigma$$

dans lesquels $g_1 \ldots g_n$ représentent de nouvelles fonctions arbitraires, alors on obtient pour Ω_2 une modification identique, par l'intégration de laquelle s'ensuit

$$11)\quad \delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\Omega}{\partial y_k' \partial y_i'} U_k U_i \frac{dx}{U^2}$$

Dans cette formule, on note

$$12)\quad U_k \equiv \begin{vmatrix} \frac{dz_k}{dx} & \frac{du_k^1}{dx} & \frac{du_n^n}{dx} \\ z_1 & u_1^1 & u_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_n & u_n^1 & u_n^n \end{vmatrix}$$

et

$$13)\quad U \equiv \sum \pm u_1^1 \ldots u_n^n$$

Dans le même temps les équations des conditions (sc.h) $\delta\psi_k = 0$)) se transforment en

$$14)\quad \sum_{k=1}^{n} [\frac{\partial\psi_k}{\partial y_k'}] U_k = 0$$

De cette nouvelle formation l'on peut aisément déduire les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\delta^2 J$ conserve un signe fixe. Telles sont ces conditions:

Pour toutes les valeurs de x entre x_0 et x_1, il faut que la fonction homogène de deuxième ordre:

$$\sum_{h,i}^{n} \frac{\partial^2\Omega}{\partial y_k' \partial y_i'} U_k U_i$$

entre les n arguments U_h de laquelle existent les m equations des conditions linéaires

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\psi_k}{\partial y_h'} U_h = 0 \qquad k = 1,\ldots,m,$$

possède toujours un signe fixe.

En ceci, l'exercice est ramené à un exercice d'algèbre connu et résolu.

Mais ce critère n'est manifestement valable que tant que la transformation est véritablement possible. Ainsi, afin de parvenir à des résultats complets, il est nécessaire d'étudier les limites de validité de la transformation, et de tirer de celles-ci des conclusions permettant une application simple. Il s'agit donc d'accomplir ici ce qui, pour le problème particulier traité de façon exhaustive dans l'introduction, correspond au passage du critère imparfait de Legendre à celui vers lequel tendait déjà Lagrange et que Jacobi fut le premier à atteindre parfaitement. Il s'ensuivit là ce resultat important que la borne la plus extrême, au-delà de laquelle l'intégrale proposée ne peut en général absolument pas présenter d'extremum, est identique à la limite de validité de la transformation de Lagrange. Jacobi lui-même avait déjà établi ce théorème pour le problème général d'une fonction inconnue <1>, sans toutefois le démontrer, dans sa note du dix-septième volume du Journal de Crelle. Hesse, qui dans son travail (Journal de Crelle LIV) s'était fixé la tâche d'effectuer les calculs pour ce problème - calculs dont il s'était en fait acquitté fort élegamment - ne put malgré des efforts évidents établir comme résultat du calcul ce point culminant atteint par Jacobi dans ses recherches, grâce auxquelles seulement il devient possible d'établir des critères parfaits. Et c'est la même difficulté qui força Clebsch à s'arrêter tout près du but dans ses recherches sur le problème le plus général du calcul des variations.

<1> C'est-à-dire $\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y',\ldots,y^{(m)})dx = \text{Extr.})$)

Exactement comme pour le problème particulier, on peut donner de prime abord pour le problème général une limite extrême x' que ne doit pas dépasser, ni même en fait atteindre, la borne supérieure x_1, afin qu'il soit possible que l'intégrale proposée (en général) présente un extremum. En effet, puisque $2\Omega_2$ est une fonction homogène de deuxième ordre en z, z', μ alors on a

$$2\Omega_2 = \sum_k \left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_k} z_k + \frac{\partial\Omega_2}{\partial z'_k} z'_k\right) + \sum_k \frac{\partial\Omega_2}{\partial\mu_k}\mu_k$$

$$= \sum_k \left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_k} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial z'_k}\right)\right) z_k + \frac{d}{dx}\sum_k \frac{\partial\Omega_2}{\partial z'_k} z_k + \sum_k \frac{\partial\Omega_2}{\partial\mu_k}\mu_k .$$

donc

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \sum_k \left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega_2}{\partial z'_k}\right) z_k + \sum_k \frac{\partial\Omega_2}{d\mu_k}\mu_k \right\} dx + \left[\sum_k \frac{\partial\Omega_2}{\partial z'_k} z_k \right]_{x_0}^{x_1}$$

Nous en concluons de facon immédiate que $\delta^2 J$ se réduit à la valeur-limite pour chaque système de solutions des équations différentielles simultanées.

A) $$\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega_2}{\partial z'_k} = 0, \qquad \frac{\partial\Omega_2}{\partial\mu_k} = 0$$

Or, le systeme A) s'accorde pleinement avec le système 6) précédemment évoqué, et dont les solutions sont connues. Nous en concluons:

Chaque fois qu'il est possible de particulariser ces solutions

$$u_h = \sum \gamma_\lambda \frac{\partial \psi_h}{\partial c_\lambda}$$

$$r_k = \sum \gamma_\lambda \frac{\partial \chi_k}{\partial c_\lambda}$$

de telle façon que les u_h s'annulent pour $x = x_0$ et $x = x_1$ ou pour une valeur $x = x'$ située près de x_1, on peut donner également des variations spéciales pour lesquelles on a

$$\delta^2 J = 0 \;;$$

celles-ci sont, dans le premier des deux cas:

$$z_h \equiv u_h \qquad\qquad \mu_k \equiv r_k$$

et dans le dernier: $z_h \equiv 0$, $\mu_k \equiv 0$ dans l'intervalle $x' \ldots. x_1$, et $z_h = u_h$ et $\mu_k = r_k$ dans l'intervalle $x_0 \ldots. x'$. Mais alors I ne peut en général devenir ni maximum, ni minimum.

L'on voit donc que ce point limite extrême x', que la borne supérieure x_1 ne doit pas atteindre, est défini par la racine située près de x_0 de l'équation

$$15) \qquad \Delta(x,x_0) = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial c_1}\right)_{x_0} & \cdots & \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial c_{2n}}\right)_{x_0} \\ & & \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_k}{\partial c_{2n}} \end{vmatrix} = 0$$

$$k = 1,2,\ldots, n$$

Il nous faut considérer ce fait important comme ce qui nous est donné de prime abord. L'impossibilité de Hesse et de Clebsch à surmonter cette difficulté - qui, comme nous allons le voir par la suite, n'est pas vraiment une difficulté particulière - s'explique à mon avis de la façon suivante: c'est que tous deux n'ont pas prêté assez d'attention à ce fait et à sa position dans le critère de Jacobi, mais que, partant uniquement du calcul, ils avaient considéré l'exercice à résoudre finalement uniquement comme une <u>détermination de constantes</u>.

La transformation de Clebsch n'est en effet valable, comme on peut s'en rendre compte aisément, que tant que $U = \sum \pm u_1^{1} \ldots u_n^{n}$ ne disparait pas à l'intérieur des limites x_0 et x_1. En d'autres termes, pour que la transformation soit véritablement possible et valable, il faut que l'on puisse déterminer les fonctions de la transformation u_h ou plutôt les $2n^2$ constantes arbitraires γ_λ^ρ qui apparaissent dans ces fonctions de telle facon que

1) les $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions 9) independantes de x soient remplies de façon identique;

2) pour aucune valeur de x dans l'intervalle le determinant U ne soit égal à zéro.

Il semble donc nécessaire de rechercher les valeurs les plus générales des constantes qui répondent aux conditions 9) et pour lesquelles U ne devient pas identique à zéro, et d'étudier ensuite si parmi les systèmes ainsi déterminés il s'en trouve quelques-uns qui satisfassent également à la seconde condition. C'est là en fait la voie empruntée par Clebsch et, en supposant que les constantes d'intégration $c_1,\ldots,c_{2n}$ soient des constantes canoniques, il a donné les valeurs les plus générales des γ_λ^σ qui remplissent cette première exigence nommée. Mais à cause de la complication des expressions, une étude du dernier point, le plus important, s'est révélée impossible et le problème lui-même ne progressa pas.

Nous devons la construction complète de la théorie et l'établissement des critères définitifs à Monsieur A. Mayer. Celui-ci emprunte une nouvelle voie, de loin plus avantageuse, en faisant un choix spécial et bien déterminé de constantes dont l'application permettra de tout atteindre.

Bien qu'elle mène aux résultats en suivant un chemin rigoureux, une telle méthode à cependant certains inconvénients. Etablir des déterminations tout à fait spéciales de constantes possède necessairement quelque chose de fortuit, d'arbitraire en soi, et ne fait pas apparaitre clairement le fond des choses.

Bien qu'il n'y ait donc rien à ajouter aux résultats, cela ne serait peut-être pas tout-à-fait dépourvu d'intéret de trouver un procédé général et naturel, libre de tous les calculs secondaires, pour pouvoir parvenir directement aux critères, en partant de la transformation de Clebsch et de Jacobi.

L'on a exposé que tant que

$$U = \sum \pm u_1{}^1 \ldots u_n{}^n$$

ne disparaît pas à l'intérieur des bornes x_0 et x_1, la transformation conserve son sens. Dans le cas donc où celle-ci est applicable, les constantes γ_λ^σ doivent être choisies de telle sorte que ceci n'ait pas lieu. A partir de cela il est clair que les fonctions u_k^ρ introduites pour la transformation ne doivent pas disparaitre en même temps dans l'intervalle pour aucune valeur de x .

Leur forme générale est:

$$u_k = \sum_{\lambda=1}^{2n} \frac{\partial\psi_k}{\partial c_\lambda} \gamma_\lambda$$

Nous pouvons choisir les $2n$ constantes γ_λ d'infiniment de manières afin que pour n'importe quelle valeur de x , $x = x_\omega$, les n equations

$$[u_k]_\omega = \sum \left(\frac{\partial\psi_k}{\partial c_\lambda}\right)_\omega \gamma_\lambda = 0$$

soient vérifiées.

Accomplissons ceci de n manières différentes et caractérisons les n systèmes en u qui apparaissent ainsi par: $u_1^\rho \ldots u_h^\rho$ $(\rho = 1,2,\ldots,n)$, et alors leur déterminant aura la propriété de disparaître pour $x = x_\omega$, ce que nous indiquons par la notation

$$U(x,x_\omega) = \sum \pm \quad u_1{}^1 \ldots u_n{}^n .$$

Il est facile de se rendre compte que ces systèmes de fonctions u_h^ρ se prêtent à la transformation. Car en premier lieu ils vérifient les équations des conditions:

$$\sum \left\{u_i^\rho \frac{\partial\Omega_2^\sigma}{\partial\left(\frac{du_i^\sigma}{dz}\right)} - u_i^\sigma \frac{\partial\Omega_2^\rho}{\partial\left(\frac{du_i^\rho}{dx}\right)}\right\} = 0 \qquad \text{<1>}$$

pour $x = x_\omega$, et de ce fait, parce que celles-ci sont indépendantes de x , de facon identique. En second lieu il est évident que $U(x,x_\omega)$ ne peut être identique à zero, quoi que nous fassions pour tirer au hasard les fonctions u_h du n-ieme arbitraire.

Pour le cas où la transformation doive être valable, $U(x,x_\omega)$ ne doit maintenant disparaître pour aucune valeur de x entre x_0 et x_1 .

---

(1) dans le manuscrit, par erreur: "$\sum \{u_h^\rho \ldots\} = 0$ "

Nous nous demandons tout d'abord quelle est la nature des racines de l'équation

$$U(x,x_\omega) = 0 .$$

Si $x = x_\pi$ represente n'importe quelle valeur rendant nulle $U(x,x_\omega)$, il est manifestement possible de determiner les grandeurs constantes $g_1,\ldots,g_n$ de telle facon qu'elles satisfassent aux n équations linéaires

$$0 = g_1[u_1{}^1]_{x=x_\pi} + g_2[u_1{}^2]_{x=x_\pi} + \ldots + g_n[u_1{}^n]_{x=x_\pi}$$

....

$$0 = g_1[u_n{}^1]_{x=x_\pi} + g_2[u_n{}^2]_{x=x_\pi} + \ldots + g_n[u_n{}^n]_{x=x_\pi}$$

Les grandeurs

$$u_h = g_1u_h{}^1 + \ldots + g_nu_h{}^n$$

ont donc la propriete de s'annuler pour $x = x_\omega$ et pour $x = x_\pi$. Celles-ci constituent un nouveau système d'intégrales (en rapport avec les grandeurs r correspondantes) des equations differentielles 9) et possèdent également la forme

$$u_h = \sum \frac{\partial\psi_k}{\partial c_\lambda} \bar{\gamma}_\lambda$$

L'équation $U(x_\pi,x_\omega) = 0$ signifie donc qu'il existe un système de grandeurs $\bar{\gamma}_1 \ldots \bar{\gamma}_n$ pour lequel

$$\sum_{\lambda=1}^{2n} \left(\frac{\partial\psi_h}{\partial c_\lambda}\right)_\omega \bar{\gamma}_\lambda = 0 , \quad \sum_{\lambda=1}^{2n} \left(\frac{\partial\psi_k}{\partial c_\lambda}\right)_\pi \bar{\gamma}_\lambda = 0$$

est valable. Mais la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de ces équations est

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\psi_h}{\partial c_1}\right)_\omega & \cdots & \left(\frac{\partial\psi_k}{\partial c_{2n}}\right)_\omega \\ \vdots & & \\ \left(\frac{\partial\psi_k}{\partial c_1}\right)_\pi & \cdots & \left(\frac{\partial\psi_k}{\partial c_{2n}}\right)_\pi \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

ou, dans notre notation: $\Delta(x_\pi,x_\omega) = 0$. Nous en déduisons donc que toutes les racines de l'équation $U(x,x_\omega) = 0$ sont contenues parmi celles de l'équation $\Delta(x,x_\omega) = 0$.

Nous savons de prime abord que l'equation $\Delta(x,x_0) = 0$ définit le point limite le plus extrême $x = x'$ que la borne supérieure x_1 ne doit pas dépasser ni même atteindre, afin qu'un extremum soit possible. Notre travail consiste ainsi à démontrer que la détermination des constantes[2] peut en tout temps être faite jusqu'à x' , sans que U s'annule.

---

(1) dans le manuscrit, par erreur: " $\begin{vmatrix} \ldots\ldots & \\ & \\ \left(\frac{\partial\psi_h}{\partial c_\lambda}\right)_\pi & \ldots \end{vmatrix} = 0$ "

(2) c'est-à-dire la détermination "des γ_i"

Ceci est très facile à effectuer à l'aide du théorème démontré plus haut.

x_ω représentait toujours une valeur quelle qu'elle soit de x. Si nous prenons $x_\omega = x_0 - \zeta$, ou ζ represente une très petite grandeur et effectuons la détermination des constantes d'une manière quelconque, de sorte que U se transforme en $U(x,x_0 - \zeta)$, alors celle-ci est certainement valable jusqu'à la racine suivante x_ε de l'équation $U(x,x_0 - \zeta) = 0$. Or, d'après ce théorème nous concluons que nous devons avoir également $\Delta(x\ ,x_0 - \zeta) = 0$. Si nous développons, il s'ensuit

$$0 = \Delta(x_\varepsilon,x_0) - \zeta \left(\frac{d\Delta(x_\varepsilon,x)}{dx}\right)_{x=x_0} + \ldots ,$$

faisons diminuer ζ, et nous constatons de facon immédiate que la grandeur x_ε doit se trouver nécessairement dans le voisinage d'une racine $x = x_\pi$ de l'équation $\Delta(x,x_0) = 0$, de telle facon que nous ayons $x_\varepsilon = x_\pi \pm \tau$, ou τ représente une grandeur qui devient infiniment petite en meme temps que ζ.

La transformation peut donc être certainement exécutée de nombreuses manières, de facon que sa validité s'étende depuis x_0 jusque dans le voisinage[1], que l'on peut diminuer à loisir, de la racine la plus proche suivant x_0 de l'équation $\Delta(x,x_0) = 0$. Car celle-ci est d'après ce qui précède valable avec certitude jusque dans la proximité de $x = x_\pi$, et si x_π est par exemple la deuxième racine de cette équation, la transformation est d'autant plus valable jusqu'à x'.

[1] dans le manuscrit on trouve "la plus proche" rayé.

En outre, le fait que x_π doive être identique à x' est une conséquence de la remarque de Richelet[1] expliquant que $\delta^2 J$ ne peut disparaître tant que les constantes sont déterminables conformément à toutes les conditions. On en deduit qu'il n'existe pas de détermination de constantes qui soit valable en couvrant un intervalle plus grand que celui que bornent x_0 et x'. Selon quoi x ne peut pas non plus se situer au-delà de x'.

Avec la démonstration du théorème, selon lequel la transformation est réalisable entre x_0 et x' dans toutes les circonstances, nous avons atteint tout ce vers quoi nous tendions; car les critères à la fois nécessaires et suffisants s'ensuivent maintenant aisément.

Cette methode est à considérer comme la véritable source de toutes les déterminations des constantes spéciales possibles.

L'on se rend aisément compte que la détermination des constantes de Monsieur A. Mayer constitue un cas spécial de cette détermination générale et cependant plus simple. (cf. Journal de Crelle 69, p.250 en haut). ((La phrase "L'on se rend .... p.250 en haut" se trouve en marge dans le manuscrit)). Nous pouvons à présent en établir en grande quantité selon notre choix, ce qui toutefois est sans intéret pour la théorie. La spécialisation suivante peut servir d'exemple simple:

Nous choisissons les fonctions de la transformation u_h^ρ de telle sorte qu'elles

[1] Journal de Crelle, Volume 69, p.256.

1. s'annulent toutes pour $x = x_\omega$,

2. que pour une valeur quelconque de l'intervalle, $x = x_{\bar\omega}$

$$u_1^1 = u_2^2 = \dots\dots\dots = u_n^n = 1$$

et que toutes les autres fonctions soient égales à zéro.

$U(x_{\bar\omega}, x_\omega)$ recoit alors la valeur 1 et ainsi ce choix de constantes est autorisé.

Les constantes se déterminent parfaitement par les équations

$$\sum \left(\frac{\partial\psi_h}{\partial c_\lambda}\right)_{x\omega} \gamma_\lambda^{\rho} = 0 \ , \quad \sum \left(\frac{\partial\psi_h}{\partial c_\lambda}\right)_{x\bar\omega} \gamma_\lambda^{\rho} = \delta_{h\rho}$$

où

$$\delta_{h\rho} = 0 \quad \text{quand} \quad h \gtrless \rho$$
$$= 1 \quad \text{quand} \quad h = \rho \ .$$

Il s'ensuit:

$$\gamma_\lambda^{\rho} = \frac{1}{\Delta(x_{\bar\omega}, x_\omega)} \ \frac{\partial\Delta(x_{\bar\omega}, x_\omega)}{\partial\left(\frac{\partial\psi_\rho}{\partial c_\lambda}\right)_{x_{\bar\omega}}}$$

et l'on se convainc aisément du fait que maintenant $U(x, x_\omega)$ se transforme en:

$$U(x, x_\omega) = \frac{\Delta(x, x_\omega)}{\Delta(x_{\bar\omega}, x_\omega)}$$
$$= \mathcal{E}(x, x_\omega)$$

quand $\mathcal{E}$ représente une constante différente de 0 et ∞ , lorsque $x_{\bar\omega}$ est choisi de facon correspondante.

III - De la limite pour l'existence d'un extremum.

Pour les intégrales des équations différentielles nées de la disparition de la première variation, la modification complète ΔJ de l'intégrale proposée prend la forme:

$$\Delta J = \frac{1}{2!}\ \delta^2 J + \frac{1}{3!}\ \delta^3 J + \ldots.$$

Pour le cas où il n'existe pas de variations spéciales z_h pour lesquelles $\delta^2 J$ disparait, le signe de ΔJ dépend toujours uniquement de celui de $\delta^2 J$ et nous avons alors des critères parfaitement sûrs et suffisants.

Cependant, de même que la borne supérieure x_1 de l'intégrale atteint ou dépasse un certain point limite x' défini par l'equation $\Delta(x,x_0) = 0$, l'on peut toujours donner un système de variations particulières, pour lequel nous trouvons $\delta^2 J = 0$. Puisqu'en général pour le point x' la troisème variation ne disparaitra pas en même temps que la deuxième, il est justifié de dire qu'au point x' la propriété respectivement maximale et minimale cesse "en général".

Si cependant $\delta^3 J$ possède aussi la valeur 0 et $\delta^4 J$ un signe fixe pour ces variations particulières, il semble que l'intégrale puisse présenter un extremum aussi loin que possible au-dela du point x'. L'on pourrait calculer de la facon suivante:

Etudier ces cas particuliers plus précisement ne serait certes pas dépourvu d'une valeur théorique, et une methode simple, facile à appliquer, pour isoler ces cas devrait même être de la plus grande utilité au point de vue pratique, car pour un problème se présentant de facon spéciale il est quasiment impossible de reconnaitre directement si ces deux conditions sont remplies ou

non, et car, par conséquent, l'on ne saurait jamais avec certitude si nous n'avons pas précisement sous les yeux une exception de ce genre.

En fait les tentatives pour traiter l'exercice dans cette forme ne manquent pas. Pour le probleme le plus dans lequel l'intégrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')dx$$

doit être traitée, nous disposons de traités exhaustifs de G. Erdmann (Revue de Schlomilch XXII, XXIII, XXVI), qui prennent en considération même le cas où toutes les variations, jusqu'à un ordre quelconque 2k-1 disparaissent.

Mais ces efforts sont rendus inutiles par un théorème que mon maître, Monsieur Weierstrass, a rigoureusement démontré dans ses cours de l'été de l'annee 1879[1], et qui est le suivant:

$x = x'$ étant le point-limite en question, l'intégrale

$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')dx$ ne peut en aucun cas avoir un maximum ou un minimum, dès que nous avons $x_1 > x'$.

Dans ce problème-ci l'observation de la deuxième variation suffit dans toutes les circonstances pour décider de la question de la présence d'un maximum ou d'un minimum.

---

[1] Il existe une rédaction sténographique de ces cours par Husserl. cf. Weierstrass, Ouvrages mathematiques, Volume 7, Cours sur le calcul des variations - Leipzig 1927 - On y trouve ce théorème légerement géneralisé et dans une autre formulation. P.154 et 163.

On est tenté de supposer que le théorème correspondant est également valable pour les problèmes généraux. Pourtant, la démonstration de Monsieur Weierstrass ne permet pas qu'on l'étende au problème le plus général. Celui-ci repose en effet essentiellement sur le théorème suivant, déjà noté par Hesse dans son travail: Si la grandeur

$$\Delta(x,x_0) = \frac{\partial\psi}{\partial c_2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial c_1}\right)_{x_0} - \frac{\partial\psi}{\partial c_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial c_2}\right)_{x_0}$$

s'annule pour $x = x'$, alors

$$\left[\frac{d}{dx}(\Delta(x,x_0))\right]_{x=x'}$$

est différent de zero.

Ceci est valable pour chaque racine x' de $\Delta(x,x_0) = 0$, donc également pour $x' = x_0$. On voit immédiatement que le même théorème n'a pas lieu d'être dans le problème général; car il est évident que les premières $n-1$ dérivées du déterminant $\Delta(x,x_0)$ sont identiques à zéro pour $x = x_0$.

Si l'on suppose que $\Delta(x,x_0)$ change de signe en s'annulant, abstraction faite de la valeur nulle identique $x = x_0$, ((abstraction faite de la valeur .... $x = x_0$" = insertion)) la démonstration de Monsieur Weierstrass pourrait très bien être généralisée; mais il semble très difficile de démontrer généralement cette supposition - si tant est qu'elle soit juste. Comme je n'en suis pas capable, je ne reproduirai pas ici cette démonstration, mais je communiquerai une tentative de démonstration de ce théorème important en empruntant une toute nouvelle voie.

Pour des raisons de simplicité, je me limite au problème général du maximum et du minimum absolus. Soulignons expressement que les considérations ci-dessous conservent leur validité pour les problèmes les plus généraux du maximum ou du minimum <u>relatifs</u> ((ms: Ma^{ε})) après l'opération de petites modifications insignifiantes se présentant d'elles-mêmes.

En suivant le raisonnement de Monsieur Weierstrass, j'appellerai la racine x' située tout pres de x_0 de l'équation $\Delta(x,x_0) = 0$ "la valeur conjuguée de x_0" (ou "point"), et toutes les deux ensemble de la même façon "un couple de valeurs conjuguées" (ou de "points").

J'attire tout d'abord l'attention sur le fait que les conditions qui furent tirées de la transformation doivent aussi être remplies nécessairement quand x_1 est situé au-delà du point conjugué x' . Car si nous divisons le chemin de l'intégration $x_0\, x_1$ en plusieurs parties constituées de telle sorte qu'aucune d'entre elles ne contienne plus de couple de points conjugués, alors la transformation est réalisable pour chacune des intégrales correspondantes, et ainsi il est clair que, s'il doit être possible qu'un extremum ait lieu entre x_0 et x_1 , la fonction homogène de deuxième ordre des n variables arbitraires $U_1 \ldots U_n$:

$$2W = \sum_{h,i} \frac{\partial^2\Omega}{\partial y'_h \partial y'_i} U_h U_i$$

doit toujours posséder un signe fixe pour toutes les valeurs de x entre x_0 et x_1 <1>. Celle-ci représente alors une "forme définie" qui ne disparaît que lorsque toutes les variables sont égales à zéro.

<1> d'après le théorème de la page 22 en haut.

Désignons pour des raisons de commodité l'intégrale I qui s'étend entre les limites $x = x\alpha$ et $x = x\beta$ par $I\alpha\beta$, et nous aurons pour les variations de notre choix z_h la formule:

$$\delta^2 I_{01} = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_h} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega_2}{\partial z'_h}\right) z_h \, dx + \left[\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial\Omega_2}{\partial z'_h} z_h\right]_{x_0}^{x_1} \qquad \text{<1>}$$

Nous supposons à présent que la portion $x_0\, x_1$ contient le point x' conjugué à x_0, mais aucun autre point x'' de même nature qui serait à son tour conjugué à x'.

Nous déterminons à présent deux systèmes de solutions des équations différentielles

I.) $$\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_h} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial z'_h}\right) = 0$$

soit

$$z_1 = u_1, \ldots, z_n = u_n$$

et

$$z_1 = w_1, \ldots, z_n = w_n$$

<1> voir Chapitre II, p.24 en haut. D'après celui-ci, manque ici le deuxième termes de la somme:

$$\delta^2 J_{0_1} = \ldots + \int_{x_0}^{x_1} \sum_{k} \frac{\partial\Omega_2}{\partial\mu_k} \mu_k \, dx \;))$$

de telle facon que nous ayons

1.) $$[u_h]_{x=x_0} = 0 \;, \; [u_h]_{x=x'} = 0$$

2.) $$[w_h]_{x=x_a} = [u_h]_{x=x_a} \;, \; [w_h]_{x=x_1} = 0$$

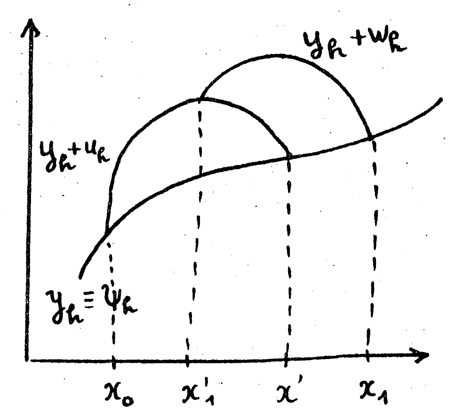
où x_a représente une valeur quelconque de x dans l'intervalle, valeur qui doit uniquement être choisie de façon qu'entre x_a et x_1 il n'existe aucun couple de points conjugués. Ceci étant supposé, il est permis d'introduire le système suivant de variations spéciales:

Nous posons dans l'intervalle $[x_0, x_a]$:

$$z_h \equiv u_h$$

et dans l'intervalle $[x_a, x_1]$

$$z_h \equiv w_h$$



En fait nous avons, d'après la supposition

$$[z_h]_{x_0} = 0 \qquad [z_h]_{x_1} = 0 \,.$$

Selon le système d'équations différentielles I.) la deuxième variation prend la forme:

$$\delta^2 J_{01} = \delta^2 J_{0a} + \delta^2 J_{a1}$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \left[\frac{\partial\Omega_2}{\partial u'_h} u_h - \frac{\partial\Omega_2}{\partial w'_h} w_h \right]_{x=xa}$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial u'_h} - \frac{\partial\Omega_2}{\partial w'_h}\right) u_h \right]_{x=xa}$$

Soit à présent $x = x_1'$ le point conjugué à x_1, situé entre x_0 et x' ; nous pouvons alors donner à x_a toutes les valeurs de x entre $x_1' + \delta, \dots, x_1$, où δ représente une grandeur suffisamment petite (("où... petite" = insertion)), et pour chacune d'entre elles la formule déduite ci-dessus est valable.

Nous posons à présent

$$3.) \qquad f(x_a) = \sum_{h=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial u'_h} - \frac{\partial\Omega_2}{\partial w'_h}\right) u_h \right]_{x=xa}$$

et nous nous représentons - les relations 1) et 2) étant toujours présupposées - x_a comme se transformant de facon continue de $x_1' + \delta$ à x_1. Pendant ce temps, ce qui est d'une clarté immediate, la fonction $f(x_a)$ n'arrêtera pas non plus de se transformer et la différentiation est permise.

Il faut remarquer que l'on a

$$\frac{d}{dx_a} [u_h]_a = \left[\frac{du_h}{dx}\right]_{x=xa}$$

et, de ce fait, nous avons

$$\frac{d}{dx_a} (f(xa)) = \sum_{h=1}^{n} [u_h]_{xa} \frac{d}{dx_a} \left[\frac{\partial\Omega_2}{\partial u'_h} - \frac{\partial\Omega_2}{\partial w'_h}\right]_{xa} + \sum_{h=1}^{n} \left[\frac{du_a}{dx}\right]_{xa} \left[\frac{\partial\Omega_2}{\partial u'_h} - \frac{\partial\Omega_2}{\partial w'_h}\right]$$

Il s'ensuit

$$\left[\frac{df(xa)}{dxa}\right]_{xa=x'} = \sum_{h=1}^{n} \left[\frac{du_h}{dx} \left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial u'_h} - \frac{\partial\Omega_2}{\partial w'_h}\right)\right]_{x=x'}$$

car d'après 1) nous avons $[u_h]_{x=x'} = 0$.

Si nous prenons de plus en considération le fait que, en général, pour des z, z' quelconques, nous avons

$$\frac{\partial\Omega_2}{\partial z'_h} = \sum_{i,h=1}^{n} \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial y'_h \partial y'_i} z'_i + 2 \frac{\partial^2\Omega}{\partial y'_h \partial y_i} z_i\right) \qquad \text{<1>}$$

<1> par la différentiation de 3) (cf. Chapitre II, p.18) en z_h naturellement il faut aussi faire la somme sur i.

il s'ensuit aisément

$$\left[\frac{df(xa)}{dxa}\right]_{xa=x'} = \sum_{i,h=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial y'_h \partial y'_i}\frac{du_h}{dx}\left(\frac{du_i}{dx} - \frac{dw_i}{dx}\right)\right]_{x=x'}$$

Or, une réflexion simple nous apprend que l'on doit avoir

$$\left(\frac{dw_i}{dx}\right)_{x=x'} = 0 .$$

En fait, pour $x_a = x'$ nos variations sont

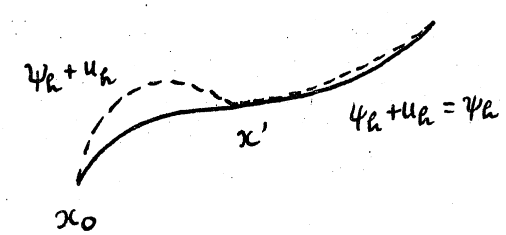
$$z_h \equiv u_h \qquad \text{dans l'intervalle } x_0 \,.....\, x' ,$$

$$z_h \equiv w_h \qquad \text{dans l'intervalle } x' \,.....\, x_1$$

et nous devons avoir $[w_h]_x = [u_h]x = 0$, et

$$[w_h]_x = 0 .$$

Puisque maintenant x' et x_1 ne peuvent être un couple de points conjugués, il faut que w_h soit identique à zéro, et de ce fait nous avons $\frac{dw_h}{dx} \equiv 0$.



A partir de cela nous avons

$$\left[\frac{df(xa)}{dxa}\right]_{xa=x'} = \sum_{i,h=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial y'_h \partial y'_i}\frac{du_h}{dx}\frac{du_i}{dx}\right]_{x=x'}$$

et dans cette formule u_h représentent les fonctions strictement déterminées par les équations

$$[u_h]_{x_0} = \sum_{\lambda=1}^{2n}\left(\frac{\partial\psi_h}{\partial c_\lambda}\right)_{x_0}\gamma_\lambda = 0$$

$$[u_h]_{x'} = \sum_{\lambda=1}^{2n}\left(\frac{\partial\psi_h}{\partial c_\lambda}\right)_{x'}\gamma_\lambda = 0$$

Il nous faut maintenant faire attention à ce que toutes les grandeurs

$$\frac{du_h}{dx} = \sum_{1}^{2n}\psi'_{h\lambda}\,\gamma_\lambda$$

– où, pour des raisons de commodité, nous avons désigné $\psi_{h\lambda}(x_0) = \frac{\partial\psi_h}{\partial c_\lambda}$

– ne peuvent pas disparaître pour $x = x'$.

Ceci exigerait en effet que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \psi_{k1}(x) & \cdots & \psi_{k,2n}(2) \\ \psi'_{k1}(x) & & \psi'_{k,2n}(x) \end{vmatrix} \equiv D(x) \qquad k=1,\dots,n$$

disparaisse pour $x = x'$.

L'on peut cependant démontrer que $D(x)$ ne peut devenir égal à zéro pour <u>aucune</u> des valeurs de x prises en considération.

Si nous supposons maintenant que pour toutes les valeurs de x situées entre x_0 et x_1 les conditions nécessaires pour l'apparition d'un extrêmum sont remplies, la grandeur

$$\sum_{k,i} \frac{\partial^2\Omega}{\partial y'_h \partial y'_i} \frac{du_h}{dx} \frac{du_i}{dx}$$

possède alors pour $x = x'$ une valeur différente de zéro.

Ainsi nous avons le résultat suivant:

Nous avons $\left[\frac{df(xa)}{dxa}\right]_{x_a=x'} \gtrless 0$, tandis que dans le même temps pourtant nous avons $f(x') = 0$, comme nous l'enseigne 3.). La fonction $f(x_a)$ change donc de signe en passant par $x_a = x'$.

Il est facile d'indiquer l'importance de ce résultat: $f(x_a)$ n'était rien d'autre que la valeur de la deuxième variation en prenant les variations spéciales définies par les formules 1.), 2.). Choisissons donc celles-ci tout d'abord de telle facon qu'après leur substitution $\delta^2 J$ reçoive la valeur: $f(x' - \delta)$ et aussi que $\delta^2 J$ prenne la valeur $f(x' + \delta)$; alors notre résultat énonce que ces deux valeurs de $\delta^2 J$ possèdent un signe opposé.

Par cela il est démontré qu'au point (x') conjugué du point de départ (x_0) de l'intégration, la propriété maximale a véritablement cessé d'exister.

J'ai trouvé encore une seconde démonstration pour ce théorème fondamental du calcul des variations, dont le principe de base est de la plus grande simplicité. Mais son exposé rigoureusement fondé nécessite toutefois des considérations assez étendues dont l'exposition nous mènerait trop loin ici.

SUR LE CALCUL DES VARIATIONS

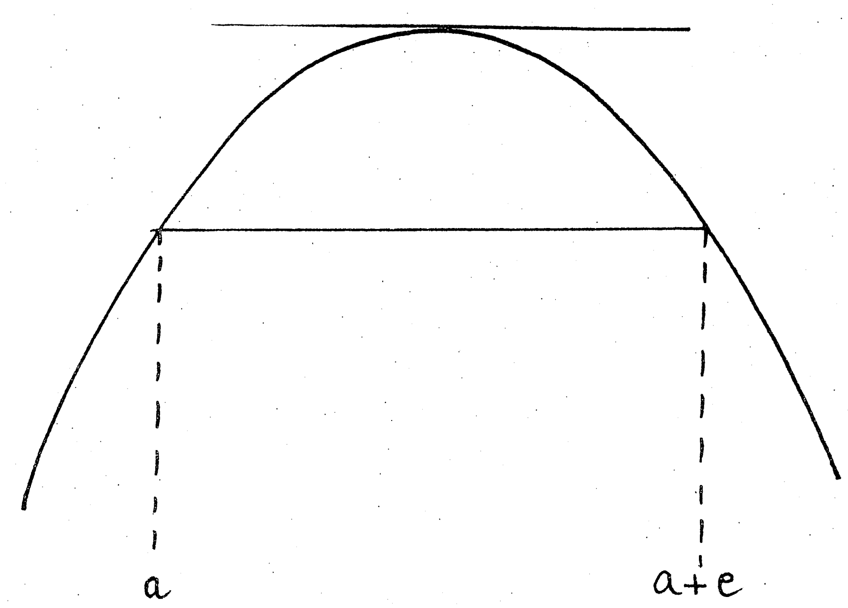
Mercatique solum, facti de nomine Byrsam
Taurino quantum possent circumdare tergo.

(Eneide livre 1)

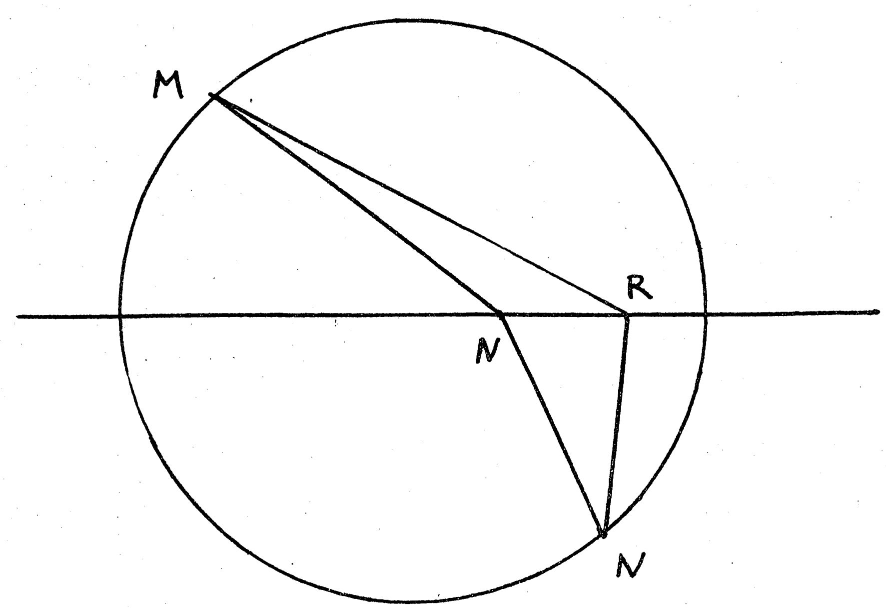
La création de Carthage par Didon aurait, si l'on en croit la légende rapportée par Virgile, suscité pour la première fois un problème de calcul des variations. Didon avait acheté, avec le peu de biens qui lui restaient après avoir fui Pygmalion, un territoire qui devait être contenu dans la peau d'un taureau. Jouant sur les mots, elle découpa le cuir en fines lanières et les attacha les unes aux autres. Il fallait alors entourer le plus de terres possible avec ce fil de longueur donnée. C'est le classique problème d'isopérimètre: trouver la surface d'aire maximum limitée par une courbe de longueur donnée. Le problème de Didon a été résolu en 1697 par l'un des frères Bernouilli: la réponse est un cercle. On peut remarquer que les Romains avaient donné la solution à Horatius Coclès; après son exploit au pont du Tibre contre les troupes de Porséna, le Sénat lui avait donné autant de terres que peut en entourer le sillon circulaire tracé par une charrue en un jour. Les problèmes d'isopérimètrie remontent donc à la plus haute antiquité; Pappus donne une solution géometrique au problème suivant: étant donné un segment de droite AB , trouver une courbe de longueur donnée partant du point A et arrivant en B telle que l'aire comprise entre cette courbe et le segment AB soit maximale (290 p. J.C.). D'autre part les Grecs,

caractérisent le segment de droite comme étant la ligne de plus petite longueur joignant deux points d'un plan donné. Archimède (287-212 av.J.C.) prend ce résultat comme postulat pour établir ses quarante-sept propositions concernant les aires et les volumes. Il faisait ses calculs en utilisant un raisonnement mécanique; nos équations modernes étaient pour lui des équilibres de statiques.

Il faut attendre Pierre de Fermat (1601-1665) pour voir réapparaitre des calculs d'extrema. Par ses méditations sur les oeuvres d'Archimède, Pappus et surtout Diophante, il met au point sa méthode "de maximis et minimis". Pour trouver les extrema d'une fonction, Fermat introduit l'opération d'"adégalité": on écrit l'équation $f(a + e) = f(a)$ que l'on développe par rapport à e ; on simplifie par e qui est en facteur, puis on l'égale a 0 . Ceci donne une équation qui fournit les extrema. Cette "adégalité" n'est autre que l'ancêtre de la dérivation de Leibniz revue par la méthode de l'analyse non standard de Robinson (1960).



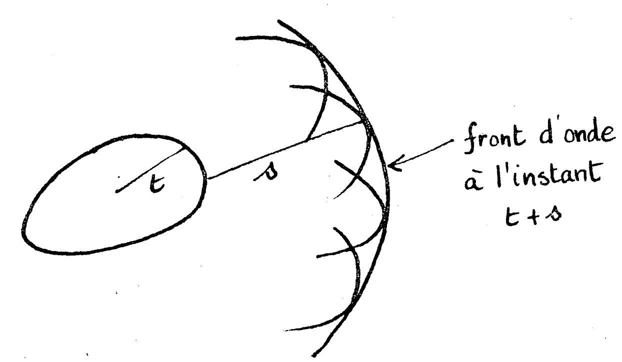
Le succès de sa méthode dans la détermination des tangentes est spectaculaire. Descartes ne comprend pas immédiatement et un vif échange de lettres par l'intermediaire de Mersenne permet à Fermat de se libérer du cadre des courbes algébriques en clarifiant son point de vue (1638-1640). Il prend connaissance à la meme époque de la "démonstration" par Descartes du principe de la réfraction qu'il récuse comme non rigoureuse. Ce n'est qu'à la fin de 1661 qu'il en donne une preuve correcte. Il reprend l'analogie, due à Descartes, de la lumière se propageant à des vitesses différentes dans des milieux d'indices différents. Sa démonstration est la suivante: supposons que la source lumineuse soit en M et que le rayon réfracté passe par H ; le milieu le moins dense est au-dessus du diamètre d'un cercle passant par M et H où la lumiere - la balle de Descartes - a une vitesse plus grande.



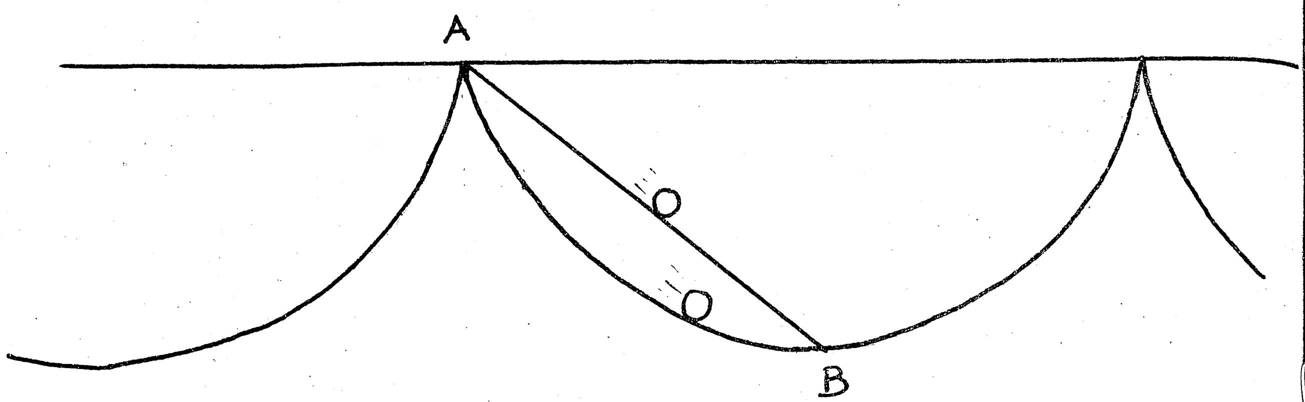
MRH est un trajet quelconque, il faut trouver la position du point R = N correspondant au trajet du rayon lumineux.

"Or puisque c'est la nature qui dirige la lumière du point M vers le point H , nous devons chercher un point soit N par lequel la lumière en s'infléchissant ou en se réfractant parviendra dans le temps le plus court du point M au point H , car on doit admettre que la nature, qui mène le plus vite possible ses opérations visera d'elle-même ce point-là. Si donc la somme IN + NH qui mesure le temps du mouvement sur la ligne brisée MNH est une quantité minima, nous aurons atteint notre but".

On remarquera que ce n'est pas le chemin minimum mais le trajet parcouru en le minimum de temps. Leibniz avait accepté ce principe bien conforme à ses conceptions métaphysiques du "meilleur" mais au lieu de temps minimum, il parlait de chemin "le plus facile" au moyen du produit de la résistance par le chemin. C'est donc du travail dont il s'agit. Il pensait à l'encontre de Descartes que la vitesse croit avec la résistance qui empêche la dispersion des rayons; ceux-ci se trouvent ainsi reserrés telle une rivière dans une gorge étroite, et en acquièrent ainsi une plus grande vitesse. Le rapport des sinus des angles d'incidence et de réfraction est donc proportionnel au rapport des vitesses. C'est donc un principe de maximo-minimum comme le notera deux siècles plus tard Helmholtz: maximum d'efficacité pour le minimum d'énergie. Huyghens en déduisait peu après que les fronts d'onde lumineuse à un instant t + s s'obtiennent comme enveloppe des fronts d'onde à l'instant s construits à partir de sources lumineuses situées sur le front d'onde à l'instant t .

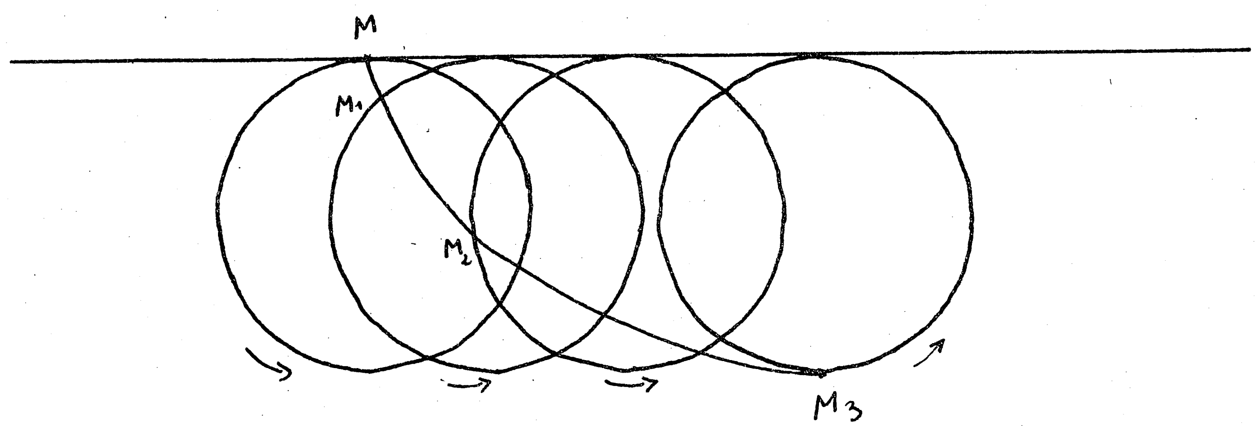


Au début du dix-septième siècle, Galilée observe qu'un point pesant lâché sans vitesse sur une courbe AB ne mettra pas le temps le plus court si AB est un segment de droite.



Le problème de la courbe brachistochrone est donc posé:

C'est seulement à la fin du siècle (1697), à la suite d'un concours lancé par Jacques Bernouilli, professeur à Basles, pour la résolution de ce problème que l'on saura que la courbe de temps minimum est un arc de Cycloïde.



Génération de la cycloïde.

Ce problème reçut une solution de Newton, Jacques et Jean Bernouilli, après que le calcul infinitésimal eut été mis au point par le premier et par Leibniz (1684). Jacques Bernouilli avait, auparavant, résolu le problème de Didon: brachistochrone et isoperimètre furent ainsi les deux premiers problèmes du calcul des variations qui reçurent une solution. Dans la première moitié du 18e siècle, Maupertuis assimile les théories de Fermat et Leibniz et se donne pour tâche de les confronter avec celles de Newton qui expliquait la réfraction par l'attraction des milieux les plus denses. Cette attraction devait rapprocher le rayon de la perpendiculaire à la ligne de séparation, ce que l'on constate bien expérimentalement. Pour concilier ces théories, Maupertuis propose de substituer au principe de Fermat celui de la "moindre action". L'action est le produit de la vitesse par le chemin et le minimum de Leibniz, produit de la résistance par le chemin est, dans ce cas, la même chose, la résistance étant proportionelle à la vitesse. Ceci cesse d'être vrai si l'on abandonne l'optique pour la mécanique et cette convergence de vues est fortuites. Le principe de Maupertuis a le gros avantage d'être vérifiable expérimentalement au contraire de celui de Leibniz entaché de la notion vague de résistance. La divergence métaphysique se trouvera alors nettement définie par la notion de dépense ou d'épargne divine correspondant au travail fourni qui se substitue à l'action[1].

[1] Guéroult: Dynamique et Métaphysique Leibnizienne, Les Belles Lettres, 1934.

Le principe de moindre action a le plus de retentissement en mécanique: Si l'on considère les trajectoires d'un point materiel soumis à un champ de forces, l'analogue de la longeur optique du chemin entre A et B (c'est-à-dire le temps minimal de propagation de la lumiere entre A et B) est l'action le long de la courbe trajectoire du mouvement entre A et B. Autrement dit, pour tous les mouvements possibles donnant des trajectoires passant par A et B avec la même énergie que le mouvement réel, l'action

$\mathcal{A}_A^B = \int_A^B \langle m\vec{v}, d\vec{r}\rangle$ est minimale pour le mouvement réel. Ce principe est

équivalent à la loi de Newton $\vec{F} = m\vec{\gamma}$. Notons toutefois que le principe de Maupertuis est un principe global: il considère le mouvement dans son ensemble, contrairement à la loi de Newton qui est une donnée locale à partir de laquelle on le reconstitue. Il ouvre donc la voie à la mecanique statistique et à la mecanique quantique.

Elève de Jean Bernouilli, Euler, dans son travail de législateur de l'analyse, ne pouvait pas ne pas rencontrer les problèmes de calcul des variations. En 1744, il fonde en fait ce calcul (dont le nom est dû à Lagrange, son contemporain) par son traité "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes". Il retrouve ainsi, en étudiant le mouvement d'un projectile dans un milieu résistant, le principe de moindre action de Maupertuis. Euler mit en évidence (1744) la première condition nécessaire pour qu'une courbe $\gamma(t)$ où t désigne le temps, soit extrêmale. Lagrange continua ce travail (1754), encouragé par Euler, en dégageant le calcul des variations des considérations spécifiques à chaque problème particulier. Le problème était ainsi posé dans sa forme moderne: on entrait dans la phase technique de contrôle des phénomènes.

A la même epoque, Kant dans sa thèse, reprenait ce probleme de maximum-minimum du calcul des variations: c'est le fameux exemple des alvéoles des abeilles. Elles utilisent le minimum de cire pour le maximum de surface entourée. Ce problème d'espace rempli par des volumes identiques reste ouvert: on ne connait que des solutions partielles au 18e probleme de Hilbert concernant l'empilement optimal de volumes identiques tels que le volume des interstices soit le plus petit possible.

Rappelons que pour une fonction dépendant de plusieurs variables $L(x,y,z)$, $\frac{\partial L}{\partial x}$ designe la variation infinitésimale de L par rapport à x, y et z étant fixés; de même $\frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z}$ par rapport à y et z respectivement. L'audace d'Euler et de Lagrange fut de calculer la variation infinitésimale d'une fonction par rapport à une courbe γ : c'était faire en fait du calcul différentiel dans l'espace des courbes regulières γ qui est de dimension infinie. Le problème s'énonce plus précisement: calculer la différentielle (variation infinitesimale) de

$$\phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma,\dot{\gamma},t)\,dt$$

où $\dot{\gamma}$ désigne la vitesse le long de γ. En effet, si γ est extrèmale la différentielle de ϕ calculée pour la valeur γ est nulle. On calcule l'accroissement de L pour une variation δ de γ

$$L(\gamma + \delta, \dot{\gamma} + \dot{\delta}, t) - L(\gamma, \dot{\gamma}, t) = \frac{\partial L}{\partial \gamma}\delta + \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}}\dot{\delta}$$

et des termes d'ordre inferieur lorsque δ tend vers 0 , et on écrit

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} \dot{\delta} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} \delta\right] - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}}\right)\right] \delta$$

D'où

$$\phi'(\gamma) = \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial L}{\partial \gamma} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}}\right)\right]\delta \, dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} \delta\right]_{t_0}^{t}$$

Choisissant δ telle que $\delta(t) = \delta(t_0) = 0$, le dernier terme s'annule et la condition $\phi'(\gamma) = 0$ se lit:

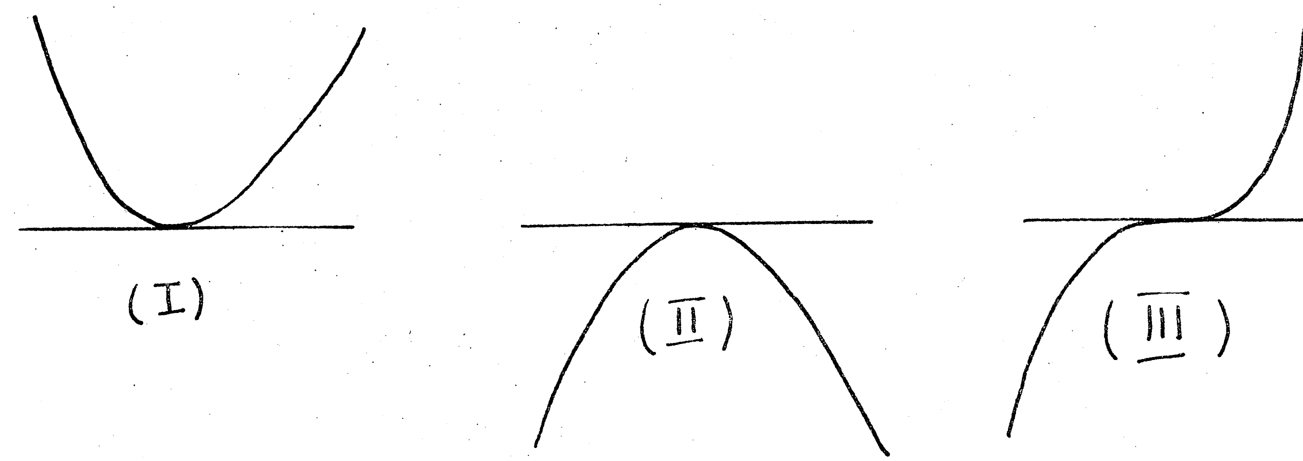
$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}}\right)$$

C'est l'équation différentielle d'Euler-Lagrange. La mise en forme rigoureuse de l'implication

$$\int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial L}{\partial \gamma} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}}\right)\right]\delta \, dt = 0 \Longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \gamma} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}}\right) = 0$$

ne sera faite que vers la fin du dix-neuvième siècle par Du Bois Raymond.

L'annulation de la différentielle d'une fonction correspond à une pause dans les variations de celles-ci, la courbe représentative qui s'élance semble s'arrêter avant de repartir. La droite qui touche la courbe en ce point, c'est-à-dire la tangente, est horizontale; on a les dessins suivants:



Les cas I et II sont analogues et correspondent respectivement à un maximum ou un minimum; le cas III montre que le point ou la différentielle s'annule ne correspond pas toujours à un extremum. La discrimination de I, II par rapport à III se fait grâce à la concavité: dans le cas I, la courbe est convexe; dans le cas II, elle est concave; dans le cas III, elle est convexe d'un côté et concave de l'autre du point considéré. La différentielle correspond à la pente de la droite tangente en un point; dans le cas I, la tangente a une pente qui est croissante tout le temps; dans le cas II, décroissante tout le temps, alors que pour le cas III, la pente commence par décroitre jusqu'à 0 puis croit ensuite.

Il faut donc étudier les variations de la differentielle pour pouvoir faire la discrimination entre un vrai extremum (I ou II) et un faux (III). Autrement dit, il faut calculer la deuxième variation de $\phi(\gamma)$ et étudier son signe. C'est cette étude qui va occuper successivement tous les mathématiciens de Legendre à Hilbert. L'expression de la variation seconde est la suivante:

$$\phi''(\gamma)(\delta) = \int_{t_0}^{t} [\underline{P}\ \delta^2 + 2\ Q\delta\delta' + R\delta'^2]\ dt$$

avec $P = \frac{\partial^2 L}{\partial \gamma^2}$ (dérivée seconde par rapport à γ). $Q = \frac{\partial^2 L}{\partial\gamma\partial\dot{\gamma}}$ (dérivée seconde mixte en γ et $\dot{\gamma}$) et $R = \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{\gamma}^2}$ (dérivée seconde par rapport à $\dot{\gamma}$). On voit que $P\delta^2 + 2Q\delta\delta' + R\delta'^2$ est une forme quadratique en δ et δ'. Il faut étudier son signe. En 1786, Legendre, grâce à la transformation suivante, donne une condition nécessaire très simple pour avoir un extremum; il ajoute à

$$\delta^2\phi = \int_{x_0}^{x_1} (\underline{P}\ \delta^2 + 2\ Q\delta\delta' + R\delta'^2)\ dx$$

l'expression

$$\int_{x_0}^{x_1} (2\delta\delta' w + \delta^2 w')\ dx = [\delta^2 w]_{x_0}^{x_1}$$

où w est dérivable et s'annule en x_0 et x_1, expression qui est donc nulle. D'où en regroupant

$$\delta^2\phi = \int_{x_0}^{x_1} R(\delta'^2 + \frac{Q+w}{R}\ \delta)^2\ dx$$

si $(Q + w)^2 - R(P + w') = 0$. La condition de Legendre est alors, pour un minimum $(\delta^2\phi)$, que R soit strictement positif, c'est-à-dire:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{\gamma}^2} > 0$$

Malheureusement, pour cela, il faut être sûr, comme le remarquait Lagrange dans son traité sur les fonctions analytiques (1798) que w ne devient pas infini sur l'intervalle x_0, x_1 (voir à ce propos l'introduction de la thèse de Husserl). L'effort se portait donc maintenant sur la résolution de l'équation

$$(Q + w)^2 - R(P + w') = 0$$

qui est d'un type bien connu aujourd'hui pour avoir été étudiée par Riccati. On sait trouver toutes les solutions si on en connait une. C'est le mérite de Jacobi d'avoir transformé cette équation en une équation linéaire par le jeu d'un changement de fonction inconnue u

$$w = -Q - R\frac{u'}{u}$$

On obtient alors l'équation dite de Jacobi:

$$(P - Q')u - (Ru')' = 0$$

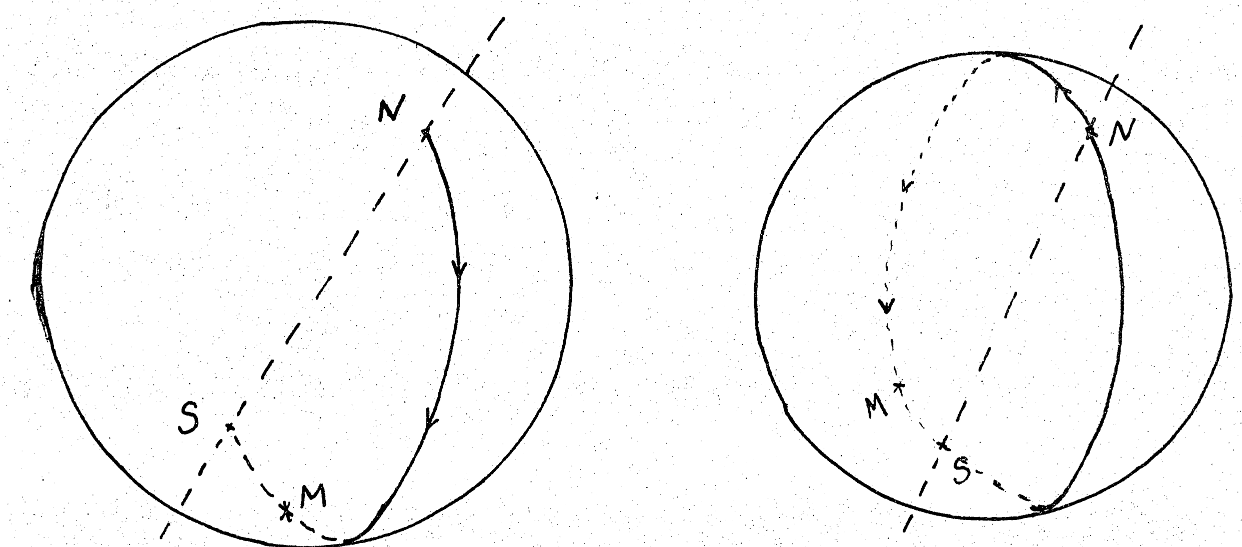
w ne devient infinie que si u s'annule. On savait que u et u' ne pou--vaient s'annuler simultanément car une equation de second ordre a une solution unique - c'est le théorème de Cauchy - correspondant à des données initiales; l'analogie mecanique est le suivant: le mouvement est entièrement déterminé une fois que l'on se donne la position et la vitesse initiales. Si celles-ci sont nulles, le point est immobile au cours du temps.

L'étude des zéros d'une solution d'une équation linéaire du type de celle de Jacobi a conduit Sturm (1825) à découvrir le théorème d'oscillation qui porte son nom: soit deux fonctions a_1 et a_2 , $a_1 \leq a_2$, alors, entre deux zéros de toute solution de l'équation $y'' + a_1 y = 0$, il y a un zéro de toute solution de $y'' + a_2 y = 0$.

Ce que l'on appelle les points "conjugués" était ainsi mis en évidence. Pour en avoir une intuition geometrique, considérons la terre et cherchons le chemin le plus court pour aller du Pôle Nord à un point proche du Pôle Sud. On sait bien que le chemin en question est l'arc de méridien qui passe par ce point. Imaginons que le point choisi se déplace sur ce meridien en allant vers le Pôle Sud; tant qu'il ne franchit pas ce pôle, le chemin le plus court est l'arc de départ, mais dès qu'il le franchit, il faut prendre l'arc de méridien qui se trouve de l'autre côté de la terre: c'est ce phenomène de "saut" à travers un point-ici le Pôle Sud-que donne l'existence de points conjugués.

Jacobi observe aussi que si $\psi(x,c_1,c_2)$ est une solution de l'équation d'Euler-Lagrange qui dépend de deux constantes arbitraires c_1 et c_2 , alors

$\frac{\partial\psi}{\partial c_1}$ et $\frac{\partial\psi}{\partial c_2}$ sont deux solutions de son équation. Les travaux de Hesse, Clebsch, Mayer vers la moitié du dix-neuvième siècle ont tendu à mettre en forme les idées de Jacobi et à développer des techniques permettant de voir un



peu mieux le signe de la variation seconde dans le cas général d'expression de la forme:

$$\Phi(y) = \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{L}(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)})\, dx$$

portant sur un nombre quelconque de dérivées de la fonction inconnue γ. Se développaient à cette occasion les déterminants de systèmes linéaires qui allaient faire partie de l'algèbre linéaire à la suite de Grassman, Kronecker et Weierstrass.

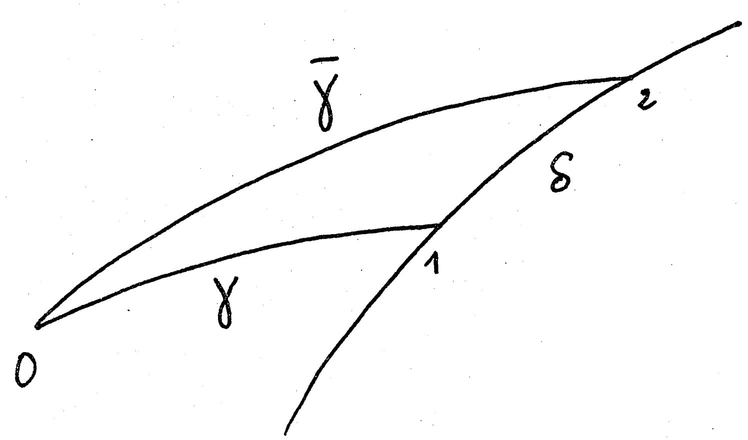
A la même époque Hamilton en Irlande, après ses recherches sur l'optique géométrique dans la ligne du principe de Fermat, s'efforce de simplifier les principes fondamentaux de la mécanique; il substitue au principe de moindre action le principe qui porte son nom: la variation de l'intégrale d'action est nulle dans toute variation du mouvement qui est nulle aux extrêmités de l'intervalle (1834); c'est la paraphrase du résultat d'Euler et Lagrange.

Comme le lecteur a pu le constater, à partir d'Euler et Lagrange, le calcul des variations est entré dans une phase technique de mise au point des outils pour le résoudre; on ne s'est pas préoccupé de la régularité de la fonction L (L pour Lagrange!). C'est ici que Gauss "princeps mathematicorum" apporte sa contribution au domaine qui nous occupe. Son travail est modeste en apparence: aucun théorème du calcul des variations ne porte son nom. Toutefois par son travail de mise au point sous sa forme définitive de l'analyse infinitésimale, ses travaux de géométrie allaient profondément influencer ses successeurs du dix-neuvième et du vingtième siècle. Ainsi, le seconde moitié du dix-neuvième siècle va-t-elle faire une révision critique des fondements et des preuves. Ce sont Weierstrass, Erdmann, du Bois Raymond, Schwarz qui vont permettre une meilleure formulation des problèmes, une preuve rigoureuses des trois premières conditions nécessaires et la preuve rigoureuse d'un extremum faible.

La première objection apparut au sujet d'un résultat de la thèse de Riemann (1851) concernant le problème de Dirichlet. Dirichlet avait introduit l'intégrale qui porte son nom pour étudier l'unicité de la distribution de charges ayant un potentiel électrostatique donné. Riemann avait montré que la solution de la recherche d'une fonction harmonique dans un domaine donné ayant des valeurs prescrites sur le bord, revient à minimiser l'intégrale de Dirichlet sur l'ensemble des fonctions dérivables et continues jusqu'au bord. Weierstrass objecta que l'existence de la fonction minimisante n'était en rien prouvée. De fait, Hadamard en 1906, grâce aux séries lacunaires qu'il venait de découvrir, prouvait l'existence de fonction continue sur le bord d'un disque n'ayant pas de prolongement à l'intérieur tel que l'integrale de Dirichlet ne devînt pas infinie. De plus, on savait bien en électrostatique que les charges sont attirées par les rugosités du bord ("le pouvoir des pointes"). Lebesgue reprendra cette idée au début du vingtième siecle pour contruire "l'épine de Lebesgue", montrant ainsi que le problème n'a pas de solution à cause de points irréguliers du bord. Le problème de Dirichlet fut résolu par la méthode des équations intégrales et cette critique de Weierstrass - si elle ralentit jusqu'à Hilbert le développement du calcul des variations dans cette direction - n'en permit pas moins le développement d'autres techniques en théorie du potentiel.

En 1897, Arzela reprit l'étude du problème de Dirichlet. Il utilisa le tout nouveau théorème d'Ascoli pour prouver qu'il existe une solution minimale dans la famille de fonctions qui prennent sur le bord du domaine les valeurs prescrites et qui ont leurs dérivées troisièmes uniformément bornées. Toutefois il se rendit compte qu'il ne savait pas prouver que cette fonction minimale vérifiait la condition d'Euler-Lagrange. Cette méthode de restreindre la famille de fonctions dans laquelle on va chercher une fonction minimisante a été le point de départ de nombreux résultats dans le domaine des équations aux dérivées partielles (Lewy en 1928) et dans les inéquations variationnelles. Il n'est peut-être pas inutile de signaler que le théorème d'Ascoli utilisé par Arzela met en oeuvre dans sa démonstration le procédé diagonal que Cantor avait découvert dans ses recherches sur les ensembles de nombres.

Weierstrass tout au long de ses lecons de l'Université de Berlin à partir de 1860 reprit les résultats de ses prédécesseurs les étendit au cas de courbes données paramétriquement pour les applications géométriques, faisant disparaître ainsi des restrictions artificielles qui existaient dans la méthode précédente. Il ajoute à la première condition d'Euler-Lagrange, à la deuxième de Legendre, à la troisième de Jacobi sur les points conjugués, une quatrième condition qui, avec les précédentes donne un système nécessaire et suffisant pour l'existence d'un extremum. C'est la première solution complète et historique dans le cas simple d'une fonction $L(x,y,y')$. Il développe le calcul d'Euler et introduit la notion féconde de champ d'extrêmales; une extrêmale est une courbe passant par un point donné et qui satisfait à la condition d'Euler-Lagrange. On voit apparaitre le dessin qui reste fondamental dans le calcul de variations:



et il étudie la différence pour h petit

$$\Delta J = J(\bar{\gamma}) - \big(J(\gamma)+J(\delta)\big) = -h\int_{x_2}^{x_1} \mathcal{E}(x,y,p,\bar{p}) + \varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 avec h et où

$$\mathcal{E}(x,y,p,\bar{p}) = L(x,y,\bar{p}) - L(x,y,p) - (\bar{p}-p)\frac{\partial L}{\partial p}(x,y,\bar{p})$$

"fonction $\mathcal{E}$" qui porte son nom (1879).

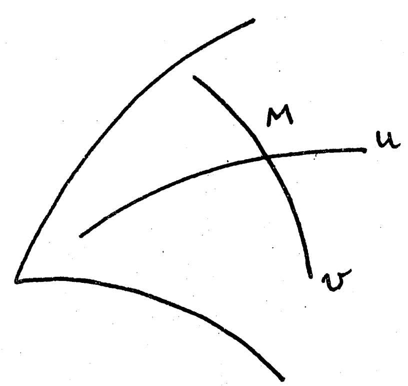
Zermelo interprète la condition de Legendre comme une condition de convexité de $\mathcal{E}$ par rapport à p et Schwarz en 1899 étend le résultat de Weierstrass de la facon suivante: si l'extremale γ peut être entouré d'un champ d'extrêmales, la variation $\Delta J = J(\bar{\gamma}) - J(\gamma)$ pour toute courbe $\bar{\gamma}$ entièrement contenue dans le champ vaut

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathcal{E}(x,\gamma,p,\bar{\gamma}')$$

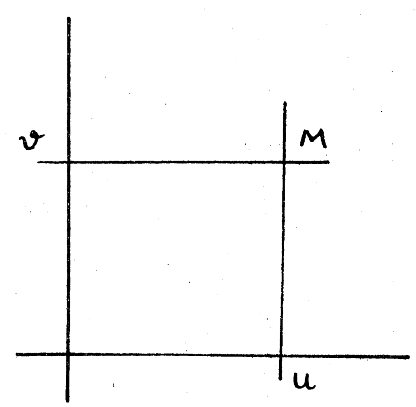
où p est la pente de la tangente en x, de l'unique extrêmale passant par ce point. Il faut se rendre compte que jusqu'à Weierstrass les mathématiciens tout d'abord considéraient que les problèmes avaient toujours une solution et ensuite que résoudre un problème consistait en la détermination explicite au moyen d'une formule d'une solution. On voit la révolution dans les mentalités que ce problème a pu provoquer par l'analyse a priori des conditions portant sur une telle solution.

D'autre part naît aussi le problème de la régularité des fonctions: une fonction continue est-elle dérivable? Weierstrass qui utilisait dans ses démonstrations des fonctions développables en série entières se pose le problème et montre par un exemple que la dérivabilité ne découle pas nécessairement de la continuité. Si cet exemple parut monstrueux à son époque, les mathematiciens d'aujourd'hui ont un exemple "plus naturel" de ce phénomène avec le mouvement brownien, modèle mathématique des trajectoires aléatoires des particules de pollen que le botaniste Brown observait dans un récipient contenant un liquide.

Jusqu'en 1900, le calcul des variations allait marquer une pause: des géomètres comme Kneser et Darboux s'en emparaient pour l'adapter aux problèmes de surfaces. En particulier, le premier d'entre eux est la détermination de la plus courte distance entre deux points d'une surface donnée. Pour le plan, c'est une ligne droite; pour une sphère c'est un grand cercle qui passe par ces deux points. Kneser considérait non plus comme Weierstrass des extrêmales issues d'un point fixe mais une famille quelconque de telles courbes. Cela lui permettait d'obtenir ce que l'on appelle aujourd'hui les coordonnées



Surface



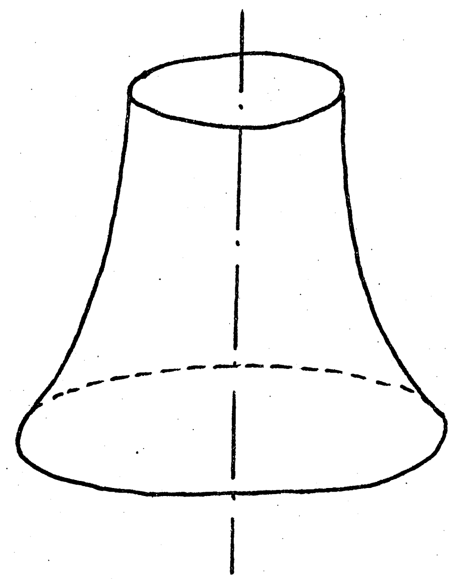
Plan

géodesiques d'un point d'une surface: un point d'une surface est ainsi repéré comme dans le système cartésien du plan par deux coordonnées, les numéros des deux courbes qui se coupent en ce point (l'analogue des deux droites parallèles aux axes de coordonnées). L'une des courbes (u par exemple) est une géodésique et les courbes v sont perpendiculaires en chaque point d'une courbe u . Ceci se fait évidemment au voisinage d'un point: un tel paramètrage n'est pas toujours possible globalement sur la surface. Kneser retrouve en le généralisant le théorème de Weierstrass sur la suffisance des quatre conditions énoncées plus haut. C'est cette approche géométrique qu'Hilbert reprenait pour donner sa très élégante démonstration du théorème de Weierstrass au congrès international des mathématiciens à Paris en 1900. Il considerait l'intégrale

$$J^* = \int_a^b [F(p,y,x) + (y' - p)\frac{\partial F}{\partial p}]\, dx$$

et il cherchait comment choisir p pour que J^* ne depende plus de la fonction y . Il trouvait une équation différentielle équivalente à celle d'Euler-Lagrange et retrouvait ainsi la fonction $\mathcal{E}$ de Weierstrass en quelques lignes.

Nous nous sommes intéressés au problème des courbes qui est le plus simple; il faut comprendre que parallèlement et, dès 1760, avec Lagrange se posaient les problèmes de surfaces minimales. Par exemple, étant donnés deux cercles coaxiaux, trouver la surface d'aire minimum qui s'appuie sur ces deux cercles; problème aussi vieux que celui de la courbe brachistochrone et dont la solution est donnée par une caténoïde, la courbe méridienne est une chainette ("cosinus hyperbolique") appelée ainsi car tout fil pesant tenu par ses extrêmités décrit un telle courbe. Lagrange se contente d'écrire les



conditions que doivent satisfaire les surfaces d'aire minimale s'appuyant sur un contour donné. En particulier elle doivent vérifier des équations différentielles. Meusnier, en 1776, étudie ces équations et, en retrouvant le point de vue d'Euler sur l'approximation locale d'une surface par un arc de cercle pivotant autout d'un axe, donne une interprétation géometrique: la somme des rayons de courbure principaux correspondant aux extrema des rayons des cercles précédents doit être nulle. Il trouve deux surfaces minimales: la catenoïde et l'hélicoïde: ce seront les seules connues jusqu'en 1830.

On va s'occuper de simplifier les équations de Lagrange: Monge en 1784 trouve des changements de variables qui les met sous une forme plus agréable. Legendre en 1787 puis Ampère en 1820 mettent au point ses démonstrations. Scherk, en 1834, déduit des équations de Monge des exemples nouveaux de surfaces minimales, c'est-à-dire solutions des équations de Lagrange, mais on ne sait pas si elles sont d'aire minimale! Il cherche toutes les surfaces minimales engendrées par une droite variable et montre qu'il n'y a que hélicoïde.

Bonnet en 1853 introduit un nouveau système de repérage sur les surfaces: les coordonnées isothermes. C'est ce système qui a permis les travaux de Darboux et de Weierstrass: les fonctions qui interviennent dans le problème sont analytiques donc très régulières. en 1866, Weierstrass établit le lien entre surfaces minimales et les fonctions de la variable complexe dont les méthodes allaient être très efficaces pour la résolution de ces problèmes. Lie, dès 1864, simplifie encore les équations de Monge et en 1878 donne des modes de générations des surfaces minimales à partir de courbes minimales. Le milieu d'un segment s'appuyant sur ces courbes décrit une surface minimale la plus générale définie par les équations de Monge. On sait que les équations différentielles qui proviennent de ces recherches sont invariantes par des familles de changements de variables; ces familles ont une structure de groupe: ces groupes appelés: "de Lie" ont été d'une fécondité prodigieuse en mathématique; leur étude infinitésimale a donné naissance aux algèbres de Lie que l'on étudie maintenant d'un point de vue purement algébrique.

Schwarz a continué le travail de Weierstrass et prouvé en particulier que toute droite tracée sur une surface minimale est un axe de symétrie. Mais c'est surtout au sujet du problème de Plateau qu'il s'illustra: le problème d'aire minima posé par Lagrange avait été resolu expérimentalement par l'ingénieur belge Plateau; il plongeait le contour donné dans une dissolution de liquide glycérique et le film de savon donnait la solution!

Riemann, Weierstras et Schwarz apporteront la contribution essentielle du 19e siecle à ce problème. L'écrit posthume de Riemann en 1867 étudie le cas où la courbe est formée de segments de droites; ses résultats sont à l'époque les plus complets et les plus généraux; ils étaient reliés au célèbre théorème de la représentation conforme qu'il avait découvert, théorème relatif à la transformation d'un domaine plan sur un autre par des fonctions analytiques.

Weierstrass à la même époque annonçait des résultats analogues sans donner de démonstrations. Schwarz en 1871 étudiait le cas d'un quadrilatère gauche en utilisant la représentation conforme. Deux études parallèles se développaient: celles des surfaces vérifiant les conditions de Meusnier qui sont minimales dans un sens faible et celles qui vérifient effectivement la condition de Plateau. On savait qu'il existait des surfaces minimales qui ne sont pas d'aire minimum; par exemple, la surface d'Enneper d'equations

$$\begin{cases} x = u + uv^2 - \dfrac{u^3}{3} \\ y = -v - u^2v + \dfrac{v^3}{3} \\ z = u^2 - v^2 \end{cases}$$

D'autre part, il était connu que la solution au problème de Plateau n'était pas unique. C'est cette notion d'aire qui allait au debut du 20e siecle donner naissance à l'outil puissant qu'est l'intégrale de Lebesgue. De même que l'on approche une ligne courbe par une ligne polygonale, on peut essayer d'approcher une surface par des polyèdres inscrits dont l'aire convergera vers l'aire de la surface. Schwarz avait donné l'exemple d'une approximation d'une portion de cylindre circulaire par deux découpages polyèdraux dont les limites d'aire donnaient deux résultats complètement différents! C'est Lebesgue, en 1902 dans sa thèse intitulée "Intégrale, longueur, aire", qui donnait une définition devant pallier l'inconvénient précédent: l'aire est la plus petite valeur des limites possibles pour les approximations par des polyèdres. On sait quel prodigieux outil Lebesgue allait forger par la mise au point de l'intégrale qui porte son nom; les retombées pour le problème qui nous occupe apparurent plus tard.

Mais le Hongrois Goecze donnait l'exemple d'une surface passant par tous les points d'un cube et ayant une surface nulle! Le problème était maintenant topologique: il concernait la notion de convergence d'une surface vers une autre. Fréchet en 1906 étudiait ce problème et permettait le départ de la notion d'espace métrique en topologie moderne. Pourtant les surfaces d'aire finie pouvaient être pathologique; Sacks donnait l'exemple d'une surface d'aire finie n'ayant de plan tangent en aucun point. Dans les années 20, Haar puis Rado généralisent les méthodes de dimension 1, montrent qu'une surface d'aire minimum est minimale et prouvent des résultats d'existence au problème de Plateau sous certaines conditions de regularités.

Garnier en 1928 reprend le programme élaboré par Weierstrass et surtout Darboux et étudie le cas où la surface minimale est bornée par un polygone. Il est amené à considérer des équations différentielles ayant un groupe de monodromie donné, c'est-à-dire, étudier le prolongement des solutions en des points singuliers. Ceci résout un délicat problème posé par Riemann et par voie de conséquence le cas de surfaces à bords polygonaux non croisés.

Douglas à la même période reprend ces idées et développe l'idée d'approximation du problème de Plateau. Son résultat fondamental est le suivant: si on peut résoudre le problème de Plateau pour une suite d'arcs qui convergent vers un arc donné alors les solutions convergent vers la solution de Plateau. Ceci-lui permit ainsi qu'à Rado de donner des méthodes constructive de minimum.

Lors de sa longue intervention au congrès international des mathématiciens en 1900, Hilbert avait tracé le bilan et les perspectives de toute la Mathématique à l'aube du vingtième siecle sous la forme d'énoncés de vingt-trois problèmes qui devaient relancer l'activité des chercheurs. La démonstration du théorème de Weierstrass que nous évoquions plus haut, constituait le corps du vingt-troisième problème qu'Hilbert avait intitulé "Extension des méthodes du calcul des variations"; il concluait donc sa conférence par le sujet qui lui semblait être un des plus fondamentaux. Il déplorait que peu de mathématiciens l'appreciassent à sa juste valeur. Il faut dire que cette branche des mathématiques était restée très fermée: le premier livre sur le sujet venait de paraître en 1900, c'était celui de Kneser.

Ce n'est pas seulement le vingt-troisième problème mais aussi les dix-neuvième et vingtième que Hilbert relie au calcul des variations. Dans le dix-neuvième problème, Hilbert - qui venait de résoudre complètement le problème de Dirichlet mentionné plus haut - soulevait la question de savoir si les solutions d'une équation aux dérivées partielles, à coefficients développables en serie de Taylor, qui est elliptique (ceci correspond à la variation seconde de Legendre) a toujours des solutions qui ont la même régularité. Ce problème de régularité et celui de l'existence de solutions sont fondamentaux dans l'étude des problèmes variationnels. Le vingtième ajoutait des contraintes en imposant que la solution satisfasse des conditions prescrites au bord d'un domaine donné.

La question de la régularité a été abordée par Bernstein dans sa thèse en 1904. Il prouve que si la solution du problème de Dirichlet est trois fois continument différentiable, elle est en fait analytique, c'est-à-dire développable en série entière et donc en particulier indéfiniment différentiable. Puis Lichtenstein en 1912 réduit l'hypothèse à deux fois continûment dérivable, Hopf en 1929 à une fois avec une des conditions de Hölder portant sur les dérivées partielles. Enfin Morrey, en utilisant des espaces de fonctions introduits par Sobolev, donnait une reponse au problème posé par Hilbert (1968). La recherche de régularité des solutions est nécessaire: le mathématicien construit en général ce que l'on appelle des

solutions faibles, des solutions non pas de l'équation car elles ne sont pas assez régulières pour parler de leur dérivée, mais d'une équation obtenue en faisant un "produit" avec certaines fonctions très régulières sur lesquelles par un phénomène de bascule on fait porter les dérivées. C'est l'école italienne qui s'est illustrée dans ce problème avec de Giorgi et Miranda; en 1958, de Giorgi prouve qu'une solution faible d'équation elliptique à coefficients même discontinus est nécessairement "presque continue", continue au sens de Hölder. Ces résultats furent le point de depart des études de Ladyzenskaya et Ural'tseva en Russie et Morrey aux U.S.A.. L'étude du cas des systèmes est encore ouverte malgré des résultats positifs de Morrey, Giusti, Miranda et le contre-exemple de de Giorgi (1969).

Le problème d'existence fut le second problème abordé par Bernstein dans une série d'articles de 1906 à 1912. La difficulté de comprehension de ses résultats fut la raison du temps mis à dégager l'idée sous-jacente: pour construire une solution, il suffit de connaître a priori des estimations de la grandeur des ses derivées successives. On "déforme" alors le problème initial en un problème plus simple pour lequel une solution est déjà connue. Cette méthode dite des "estimations a priori" a été complètement éclaircie par les travaux de Schauder et Leray dans leur articles commun de 1934. Comme le problème est linéaire, on cherche une solution à $Su = 0$ par la construction d'un point fixe $Tu = u$ avec $Tu = Su - u = (S - I)u$. Ces deux auteurs prouvèrent qu'un théorème de point fixe existe dans ces conditions très générales pourvu que l'on connaisse des estimations a priori du type de celles de Bernstein. La construction d'une solution u se fait alors par approximations successives: u_{n+1} est construite à partir de u_n par $u_{n+1} = Tu_n$. La méthode montre, de plus, que si la solution n'est pas unique le processus (u_n) ne peut converger vers un point fixe. Signalons au passage que ces estimations a priori font plus partie "d'un art que d'une méthode" pour l'étude des équations non linéaires (Bombieri). Les théorèmes de point fixe apparaissent comme des théorèmes de nature topologique dont un des plus fameux et celui de Brouwer: "toute application continue de la boule unité d'un espace à n dimension dans elle-même a un point fixe" (une visualisation possible en dimension deux pourrait etre celle-ci: soit une table ronde recouverte par une nappe de même diamètre, on chiffonne et on platit les plis de la nappe que l'on repose sur la table; un point de la nappe sera exactement à la place qu'il occupait avant la manipulation). Ces théorèmes de point fixe ont été en outre un des moteurs de l'analyse convexe qui envahit maintenant l'économie.

L'étude de la classe des fonctions dans laquelle pouvait se trouver la solution du problème de Dirichlet fut aussi très feconde pour l'analyse contemporaine. Levi, Fubini, Haar et Lebesgue s'intéressèrent au propriétés nécessaires de telles fonctions; Lebesgue observa qu'elles ont des propriétés de maxima analogues aux propriétés des fonctions analytiques de Cauchy et Weierstrass. Sur un compact (ensemble fermé et borné) elles atteignent leur maximum sur le bord et jamais à l'interieur sauf si elles sont constantes. La méthode dite "des barrieres" utilise cette remarque: on coupe les fonctions en les remplaçant par une constante de telle sorte que les valeurs au bord soient conservées; l'intégrale de Dirichlet diminue alors.

Le développement de ce que l'on a appelé "les méthodes directes" pour l'étude de l'existence fut tout d'abord élaboré par Tonelli (1921) dans ses "Fondamenti del calcolo delle variazioni". On cherche à prouver d'abord que l'intégrale considerée a une borne inférieure finie; puis qu'elle est semi-continue inférieurement pour une topologie adéquate (c'est-à-dire qu'elle

ne peut pas varier trop brutalement vers le bas) enfin qu'il existe une suite de fonctions admissibles qui convergent dans cette classe vers une solution.

Tonelli mit en évidence ce que l'on appelle "absolue continuité" (propriété reliée au classique problème de la liaison intégrale dérivée) pour des fonctions de deux variables. Les conditions de Tonelli étaient drastiques et ce fut Morrey (1940) qui mit en evidence le rôle joué par les espaces de Sobolev. Ces espaces sont fondamentaux depuis qu'on les a mis en relation avec la théorie des distributions de Gelfand et L. Schwartz. On considère des fonctions définies seulement presque partout - sauf sur un ensemble exceptionnel que l'on peut mettre dans une réunion de boîtes dont la somme des diamètres est arbitrairement petite - et dont les "dérivées" existent - mais au sens faible évoqué plus haut - et ont des propriétés d'intégrabilité. La régularité de ces fonctions est obtenue par le lemme de Sobolev: si elles sont suffisamment faiblement dérivables alors elles sont continues si on les modifie sur un ensemble de mesure nulle. Ce sont les inégalités de Sobolev qui sont au centre de cette etude. Elles ont permis ainsi à Moser de prouver un principe de Harnack pour les equations elliptiques: le maximum d'une solution d'une équation elliptique est controlé par son minimum multiplié par une constante qui ne dépend que du domaine où l'on opère et des coefficients de l'équation.

L'étude du problème de Plateau par Bombieri, Serrin, de Giorgi met en évidence le role de la convexité du bord pour l'existence de solutions, surfaces minimales. L'étude est très complexe et n'a pas reçu à ce jour de solution complète. Ces problèmes apparaissent comme des pierres de touche pour l'analyste contemporain quand il souhaite éprouver la puissance des outils qu'il forge.

Le calcul des variations s'est étendu dans le domaine fonctionnel par les études sur les inégalités variationnelles auxquelles sont attachés les noms de Stampacchia, Lions, Duvaut: on se donne un espace X normé complet ("de Banach"), son dual X' et une application continue A de X vers X' ; on pose la dualité de X avec X' et on dit que u satisfait une inégalité variationnelle si u est dans un convexe K de X et si $\langle Au,v-u \rangle \geqslant 0$ pour tout v de K. En général, K est une famille de fonctions minorées par une fonction donnée, X un espace de fonctions de Sobolev. Les problèmes de régularité et leur extension en dimension n font l'objet d'une analyse très active.

Un autre aspect fonctionnel qui se développe actuellement est l'étude des opérateurs "monotones" qui sont à valeurs multiples. Ceci est relié à la programmation convexe dont un des promoteurs fut Hadamard, et des théorèmes dits de min-max. Enfin la théorie du contrôle optimal est reliée à ces problèmes et a été une source d'un formidable développement de la technologie (physique nucleaire, électronique, satellites, fusées ...). On peut essayer de décrire un controle optimal comme la recherche de la minimisation d'un coût sur un certain sous-ensemble S d'un espace produit $X \times U$ ou X décrit l'état du système et U les contrôles agissant sur lui. De plus, le couple (x,u) doit satisfaire des équations $F(x,u) = w$ où F va de $X \times U$ dans un espace W, w est fixe et X est l'ensemble des couples (x,u) tels que $F(x,u) = w$.

Nous terminerons ce tour d'horizon contemporain par les travaux de Marston Morse. Ses recherches prirent racine dans le calcul des variations: en étudiant les points critiques d'une fonction, c'est-à-dire les points où s'annule la dérivée de cette fonction, il montrait dans un lemme célèbre que le comportement de f en un point critique non dégénéré est celui d'une forme quadratique qui est classifiée par sa signature (le nombre de signes + qui apparaissent dans $x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots x_n^2$). Cette approche lui permettait en etudiant certaines fonctions sur des surfaces d'en déduire des propriétés topologiques. Cette approche transposée au calcul des variations donnait de profonds résultats géometriques dès 1934: l'étude de la variation première associée au problème de la plus courte distance - géodésique - sur une surface (plus généralement sur ce que l'on appelle une variété) permettait de prouver que si deux points donnés P et Q ne sont conjugués le long d'aucune géodésique, l'espace de dimension infinie des courbes joignant P à Q a le même type d'homotopie qu'un complexe simplicial, c'est-à-dire un espace que peut être triangulé, décomposé en simplexes de différentes dimensions (un segment en dimension 1, un triangle en dimension 2, un tétraèdre en dimension 3 ...). De plus, cet espace possède une cellule de dimension d pour toute géodésique d'indice d joignant P à Q. Ces résultats ont eu des conséquences pour l'existence globale de géodésique sur des variétés riemannienne (analogues en dimension n de nos surfaces et munies d'une distance) et sur l'étude de la périodicité des groupes d'homotopie (Bott 1957) qui permettent la classification topologique des variétés (on ne sait d'ailleurs pas les calculer en général; le problème est ouvert pour la sphere pour n quelconque).

On voit quelle richesse d'inventions a suivi la genèse du calcul des variations, quel ferment il a été dans l'analyse mathématique. Nous n'avons pas été exhaustif, laissant de côté les prolongements géométriques dûs à Elie Cartan par l'introduction du calcul différentiel sur les variétés et mécaniques, comme le problème des trois corps se mouvant les uns par rapport aux autres, qui intéressa Henri Poincaré. Les limites de ce calcul sont claires si les mathématiciens ont construit un outil très sophistiqué, des problèmes comme celui de Plateau continuent à résister. La Physique interpelle le mathematicien; soyons sûrs que le calcul des variations continuera à se developper pour répondre à cette attente.

QUEEN'S UNIVERSITY AT KINGSTON
DEPARTMENT OF MATHEMATICS & STATISTICS

QUEEN'S PAPERS IN PURE AND APPLIED MATHEMATICS

No. 1	RIESZ VECTOR SPACES AND RIESZ ALGEBRAS, L. Fuchs, 85 pp.
No. 2	THE RIEMANN-ROCH THEOREM FOR ALGEBRAIC CURVES, P. Ribenboim, 159 pp.
No. 3	THE MORSE THEORY AND ITS APPLICATIONS TO SOLID STATE PHYSICS, J. Veverka, 103 pp.
No. 4	INDUCED REPRESENTATIONS WITH APPLICATIONS TO S_n AND GL(n), A.J. Coleman, 99 pp.
No. 5	LINEAR REPRESENTATIONS OF FINITE GROUPS, P. Ribenboim, 380 pp.
No. 6	REPORT ON INJECTIVE MODULES, C.T. Tsai, 250 pp.
No. 7	TRANSCENDENTAL NUMBERS, J. Lipman, 83 pp.
No. 8	TOPICS IN THE THEORY OF ELLIPTIC FUNCTIONS, P. Scherk, 308 pp.
No. 9	PARAMETRIC ESTIMATION, M.T. Wasan (available only as a book, McGraw-Hill)
No. 10	PROCEEDINGS OF THE SYMPOSIUM IN ANALYSIS, Queen's University, June 1967; Papers by: N. Dinculeanu, E. Hewitt, L. Koudryavtsev, Q.A.J. Luxemburg, M.A. Naimark, L. Schwartz, A. Ionescu Tulceau, Abstracts of contributed papers, 250 pp.
No. 11	REDUCED DENSITY MATRICES WITH APPLICATION TO PHYSICAL AND CHEMICAL SYSTEMS - Survey Lectures and Contributed Papers of a Conference held at Queen's University, August 28 - September 1, 1967. Edited by A.J. Coleman and R.M. Erdahl, 435 pp. (Vol. I).
No. 12	MULTIPLICATIVE IDEAL THEORY, R.W. Gilmer, 700 pp.
No. 13	THE ROLE OF COMPUTERS IN TEACHING, R.W. Gilmer, 700 pp.
No. 14	LA CONJECTURE D'ARTIN SUR LES EQUATIONS DIOPHANTIENNES, P. Ribenboim, 160 pp.
No. 15	LECTURES ON ALGEBRAIC NUMBERS AND ALGEBRAIC FUNCTIONS, P.M. Cohn, 174 pp.

No. 16 CONFORMAL DEFORMATIONS OF RIEMANNIAN MANIFOLDS, S.I. Goldberg and W.C. Weber, 210 pp.

No. 17 COHOMOLOGY OF FINITE GROUPS, A. Babakhanian, 216 pp.

No. 18 ANALYSIS IN CATEGORIES, S. Takahashi, 131 pp.

No. 19 FIRST PASSAGE TIME DISTRIBUTION OF BROWNIAN MOTION WITH POSITIVE DRIFT, (Inverse Gaussian Distribution), M.T. Wasan, 311 pp.

No. 20 HOMOLOGY OF LOCAL RINGS, T.H. Gulliksen, 200 pp.

No. 21 WHEN ARE PROJECTIVE MODULES FREE? A. Simis, 255 pp.

No. 22 QUADRATIC FORMS, W. Scharlau, 163 pp.

No. 23 AN INTRODUCTION TO LIE ALGEBRAS, R. Pollack, 264 pp.

No. 24 INTRODUCTION TO PROFINITE GROUPS AND GALOIS COHOMOLOGY, L. Ribes, 316 pp.

No. 25 PROCEEDINGS OF THE CONFERENCE ON UNIVERSAL ALGEBRA, October 1969, Papers by: G. Gratzer, R.S. Pierce, B. Banaschewski, R. Balbes, D. Tamari, P. Dwinger, K.B. Lee, M. Gould, D. Haley, G.H. Wenzel, 275 pp.

No. 26 MATHEMATICAL ASPECTS OF LIFE SCIENCES, Papers by: Z.A. Malzak, R. Theodorescu, P.S. Puri, J.J. Gart, W.M. Siebert, R.S. Shirley, Abstracts of Contributed Papers, Edited by M.T. Wasan, 255 pp.

No. 27 A SURVEY OF OPERATOR ALGEBRAS, I. Kaplansky
THE OPENING OF JEFFERY HALL, R.L. Jeffery and A.J. Coleman
THE RESPONSIBILITY OF THE SCIENTIST TODAY, A. Grotendieck, 130 pp.

No. 28 EQUIMEASURABLE REARRANGEMENTS OF FUNCTIONS, K.M. Chang and N.M. Rice, 177 pp.

No. 29 DIFFERENTIALS OF COMMUTATIVE RINGS, S. Suzuki, 162 pp.

No. 30 MATHEMATICAL PROBABILITY, M.T. Wasan

No. 31 CLASSICAL HAMILTONIAN LINEAR SYSTEMS, A. Ciampi, 116 pp.

No. 32 RESOLUTIONS IN ADDITIVE AND NON-ADDITIVE CATEGORIES, H. Kleisli, 209 pp.

No. 33 MONADS AND THEIR EILENBERG - MOORE ALGEBRAS IN FUNCTIONAL ANALYSIS, Z. Semadeni, 98 pp.

No. 34 CW-COMPLEXES, HOMOLOGY THEORY, A. Piccinini, 129 pp.

No. 35 SYSTEMES DE POLYNOMES, A. Robert, 108 pp.

No. 36 REPORT OF THE ALGEBRA GROUP, September 1972 - August 1973, Edited by P. Ribenboim and A.V. Geramita, 351 pp.

No. 37 RADICAL AND SEMISIMPLE CLASSES OF RINGS, R. Wiegandt, 248 pp.

No. 38 OPERATOR THEORY OF PSEUDO-INVERSE, S.R. Caradus, 67 pp.

No. 39 AN INTRODUCTION TO STOCHASTIC PROCESSES, M.T. Wasan, 598 pp.

No. 40 REDUCED DENSITY OPERATORS WITH APPLICATION TO PHYSICAL AND CHEMICAL SYSTEMS, Vol. II, R.M. Erdahl, 234 pp.

No. 41 REPORT OF THE ALGEBRA GROUP, September 1973 - August 1974, Edited by P. Ribenboim and A.V. Geramita, 306 pp.

No. 42 CONFERENCE ON COMMUTATIVE ALGEBRA, A.V. Geramita, editor, July 7-11, 1975, 268 pp.

No. 43 INTRODUCTION TO HOMOLOGICAL METHODS IN COMMUTATIVE RINGS, A. Geramita and C. Small, 352 pp.

No. 44 INTRODUCTION TO ALGEBRAIC GEOMETRY THROUGH AFFINE ALGEBRAIC GROUPS, A. Robert, 298 pp.

No. 45 INTRODUCTION TO MODULAR FORMS, A. Robert, 98 pp.

No. 46 CONFERENCE ON QUADRATIC FORMS, August 1-21, 1976, G. Orzech (editor), 656 pp.

No. 47 AN EXPOSITION OF CATASTROPHE THEORY AND ITS APPLICATIONS TO PHASE TRANSITIONS, Donal B. O'Shea, 200 pp.

No. 48 LIE THEORIES AND THEIR APPLICATIONS (Proceedings of the 1977 Annual Seminar of the Canadian Mathematical Congress), W. Rossmann, editor, 577 pp.

No. 49 AN INTRODUCTION TO HOMOTOPY THEORY VIA GROUPOIDS AND UNIVERSAL CONSTRUCTIONS, P.R. Heath, 118 pp.

No. 50 GENERALIZED INVERSES AND OPERATOR THEORY, S.R. Caradus, 206 pp.

No. 51 ADAMS COMPLETION AND ITS APPLICATIONS, Sribatsa Nanda, 57 pp.

No. 52 TRANSCENDENCE METHODS, Michel Waldschmidt, 132 pp.

No. 53 ROBUST ESTIMATION, Robert G. Staudte, Jr., 111 pp.

No. 54 PROCEEDINGS OF THE QUEEN'S NUMBER THEORY CONFERENCE, 1979, P. Ribenboim (editor), 497 pp.

No. 55 LES HIERARCHILONGUEURS, Mostafa Guennoun, 155 pp.

No. 56 RESULTATS EFFECTIFS SUR LA REPRESENTATION DES ENTIERS PAR DES FORMES DECOMPOSABLES, Kálmán Gyory, 142 pp.

No. 57 ABSTRACT WITT RINGS, Murray Marshall, 257 pp.

No. 58 THE CURVES SEMINAR AT QUEEN'S, Vol. I, Anthony V. Geramita (editor), 150 pp.

No. 59 BLOWING UP GRASSMANNIANS, Ari Babakhanian, 77 pp.

No. 60 "ULTRA' - TECHNIQUES IN BANACH SPACE THEORY, Brailey Sims, 117 pp.

No. 61 THE CURVES SEMINAR AT QUEEN'S VOL. II, Anthony V. Geramita (editor), 220 pp.

No. 62 STATISTICAL ESTIMATION FOR STOCHASTIC PROCESSES, K. Nanthi, 273 pp.

No. 63 UNITARY REPRESENTATIONS AND COADJOINT ORBITS OF LOW-DIMENSIONAL NILPOTENT LIE GROUPS, Ole A. Nielsen, 117 pp.

No. 64 AN INTRODUCTION TO CONSTRUCTION AND ANALYSIS OF STATISTICAL DESIGNS, D. G. Kabe and S. M. Shan, 719 pp.

No. 65 CONTRIBUTIONS A LA THEORIE DU CALCUL DES VARIATIONS, E. Husserl, edited by J. Vauthier, 88 pp.

QUEEN'S PAPERS IN PURE AND APPLIED MATHEMATICS

may be purchased from:

Campus Bookstore
Queen's University
Kingston, Ontario
K7L 3N6, Canada